51.2.06

NGUYỄN VĂN NHO – LÊ BẢY
Gv chuyên Toán Trường THCS - THPT Nguyễn Khuyến TPHCM

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
CHUYÊN ĐỀ
ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH
11

(DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 11 & LUYỆN THI VÀO CAO ĐẲNG - ĐẠI HỌC)

THƯ VIỆN BÌNH ĐỊNH
PHÒNG MƯỢN
W 16.907

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39724852; (04) 39724770. Fax: (04) 39714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc:	PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập:	PHẠM THỊ TRÂM
Biên tập:	BÍCH HẠNH
Chế bản:	THANH VINH
Trình bày bìa:	XUÂN THỪA

Thực hiện liên kết: **Nhà sách HỒNG ÂN**

SÁCH LIÊN KẾT

PHƯƠNG GIẢI TOÁN CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

Mã số: 1L- 325ĐH2011
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti in Văn Lang.
Giấy phép xuất bản số: 967-2011/CXB/16-116/ĐHQGHN, ngày 26/8/2011.
Quyết định xuất bản số: 318LK-TN/QĐ - NXBĐHQGHN.
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2011.

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh thân mến !

Trong chương trình môn Toán lớp 11 phần Đại số và Giải tích chiếm một tỉ trọng rất lớn. Để giúp các em học sinh nắm được các phần kiến thức trọng tâm, các dạng toán từ cơ bản đến nâng cao của phân môn này, chúng tôi biên soạn cuốn sách tham khảo:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH

Cuốn sách gồm năm chương :

- Chương 1: Hàm số lượng giác, phương trình lượng giác.
- Chương 2 : Tổ hợp và xác suất.
- Chương 3 : Dãy số, cấp số cộng và cấp số nhân.
- Chương 4 : Giới hạn.
- Chương 5 : Đạo hàm.

Các em nên đọc phần tóm tắt lí thuyết, nghiên cứu kĩ những ví dụ và vận dụng vào giải từng bài tập. Sau đó xem lại lời giải, để tự điều chỉnh lại suy nghĩ của mình. Quan trọng là phải biết tự đúc kết cho mình cách giải và cách trình bày lời giải ở từng dạng toán.

Quá trình hội nhập hiện nay đang đòi hỏi cao việc tự học của mỗi cá nhân. Thiết nghĩ, bên cạnh sự hướng dẫn trên lớp của thầy, cô, cuốn sách này sẽ là người bạn đồng hành tốt cho các em trong những kì thi sắp tới.

Mặc dù có nhiều cố gắng trong quá trình biên soạn, nhưng cuốn sách không thể tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của các em học sinh và quý thầy, cô giáo.

Người biên soạn

LÊ BẢY – NGUYỄN VĂN NHO

Chương 1:
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

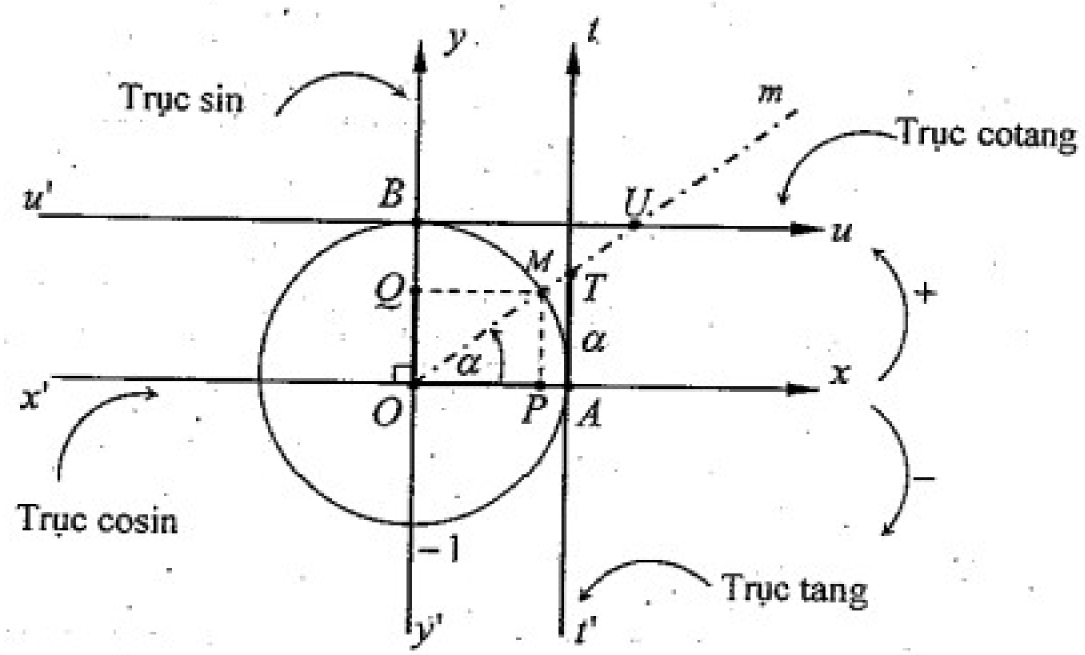
§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. PHẦN LỚP 10 :

1. Giá trị lượng giác

1.1. Giá trị lượng giác:


y
t
Trục sin
m
Trục cotang
u'
B
U
u
M
T
+
Q
α
α
x'
O
P
A
x
Trục cosin
−1
–
Trục tang
y'
t'

$\cos\alpha = \overline{OP} = x_M$; $\sin\alpha = \overline{OQ} = y_M$

$\tan\alpha = \overline{AT} = \dfrac{y_M}{x_M}$; $\cot\alpha = \overline{BU} = \dfrac{x_M}{y_M}$

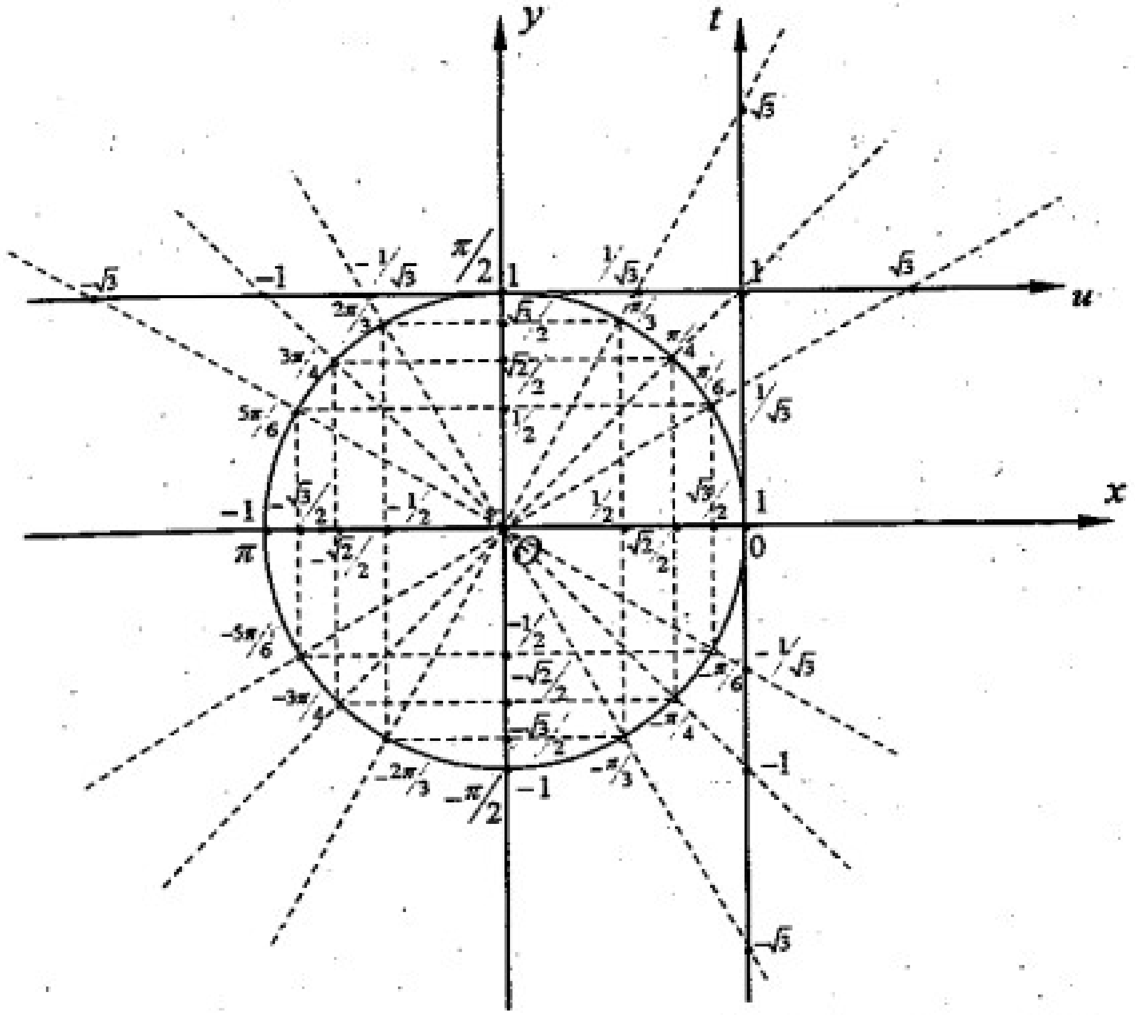
1.2. Tính chất :

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha, (\forall k \in \mathbb{Z})$$
$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha, (\forall k \in \mathbb{Z})$$
$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha, (\forall k \in \mathbb{Z})$$
$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha, (\forall k \in \mathbb{Z})$$
$$-1 \le \sin\alpha \le 1, (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$
$$-1 \le \cos\alpha \le 1, (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

$\tan\alpha$ chỉ xác định $\Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$\cot\alpha$ chỉ xác định $\Leftrightarrow \alpha \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

1.3. Giá trị lượng giác của một số góc (cung) đặc biệt:



Góc α Gtlg	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	360^0
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$\cot\alpha$	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	‖	‖

1.4. Các hệ thức cơ bản :

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$\tan\alpha.\cot\alpha = 1$, $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

1.5. Dấu của giá trị lượng giác của góc (cung):

$\sin\alpha > 0 \Leftrightarrow k2\pi < \alpha < \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$\sin\alpha < 0 \Leftrightarrow -\pi + k2\pi < \alpha < k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$\cos\alpha > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$\cos\alpha < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$\tan\alpha > 0, \cot\alpha > 0 \Leftrightarrow k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$\tan\alpha < 0, \cot\alpha < 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < \alpha < k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

2. Công thức quy gọn góc :

2.1. Hai góc đối nhau : α và $-\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

2.2. Hai góc bù nhau : α và $\pi - \alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

2.3. Hai góc hơn, kém nhau π : α và $\alpha \pm \pi$

$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha$; $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$

$\tan(\alpha \pm \pi) = \tan\alpha$; $\cot(\alpha \pm \pi) = \cot\alpha$

2.4. Hai góc phụ nhau : α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$; $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

3. Công thức lượng giác :

3.1. Công thức cộng:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta};\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

3.2. Công thức nhân đôi :

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;\ \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

3.3. Công thức biến đổi :

3.3.1. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right].$$

3.3.2. Công thức biến đổi tổng thành tích:

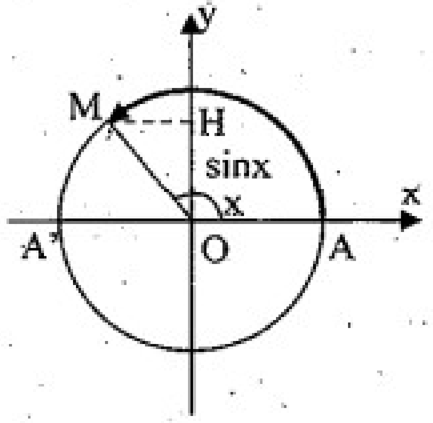
$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2};\ \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2};$$

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2};\ \sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2};$$

$$\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b};\ \tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}.$$

II. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Hàm số: y = sinx



1.1. Định nghĩa

$$\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto\overline{OH}=\sin x$$

Kí hiệu : $y=\sin x$; x đo bằng radian.

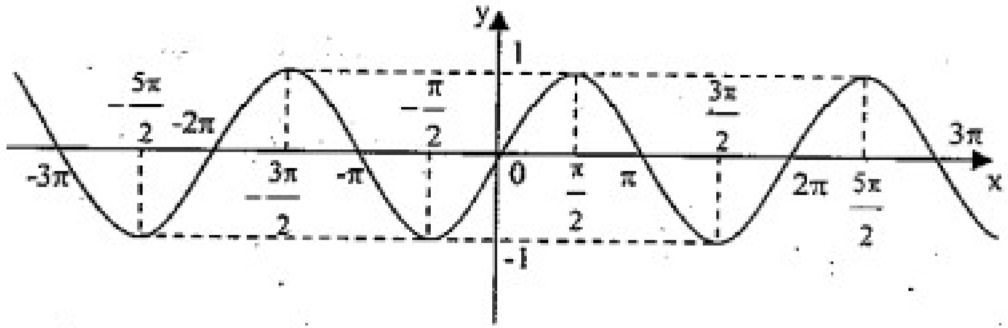
1.2. Tính chất

- Tập xác định : $D=\mathbb{R}$
- Tập giá trị : $T=[-1;1]$
- Tính tuần hoàn : Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$
- Tính đơn điệu :

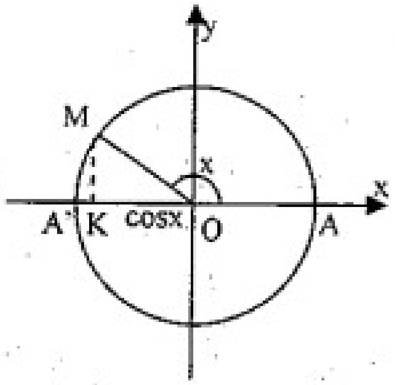
Đồng biến trên các khoảng : $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$;$(k\in\mathbb{Z})$

Nghịch biến trên các khoảng : $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$; $(k\in\mathbb{Z})$

1.3. Đồ thị :



2. Hàm số: y = cosx



2.1. Định nghĩa

$$\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto\overline{OK}=\cos x$$

Kí hiệu : $y=\cos x$; x đo bằng radian.

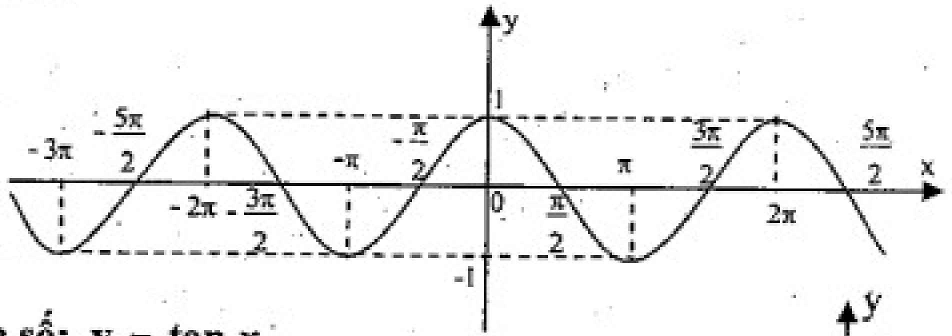
2.2. Tính chất

- Tập xác định : $D=\mathbb{R}$
- Tập giá trị : $T=[-1;1]$
- Tính tuần hoàn: Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$
- Tính đơn điệu :

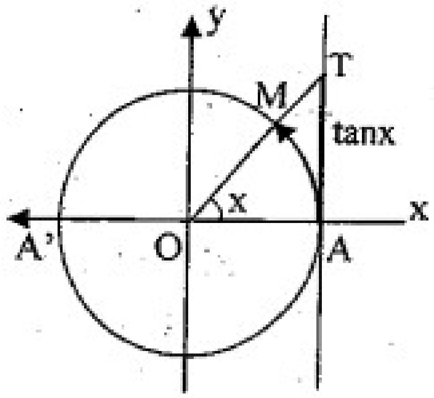
Đồng biến trên các khoảng : $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$;$(k\in\mathbb{Z})$

Nghịch biến trên các khoảng : $(k2\pi;\pi+k2\pi)$; $(k\in\mathbb{Z})$

2.3. Đồ thị :



3. Hàm số: y = tan *x*



3.1. Định nghĩa

$$\tan:D_1\to\mathbb{R}$$

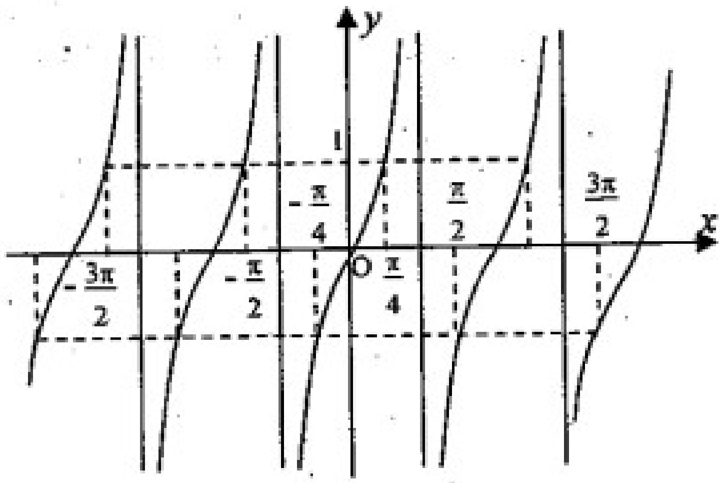
$$x\mapsto\overline{AT}=\tan x$$

Kí hiệu : $y=\tan x$; x đo bằng radian.

3.2. Tính chất

- Tập xác định : $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Tập giá trị : $T = \mathbb{R}$
- Tính tuần hoàn : Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì $T = \pi$
- Tính đơn điệu :
  Đồng biến trên các khoảng :
  $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right) ; (k \in \mathbb{Z})$.

3.3. Đồ thị :



4. Hàm số: $y = \cot x$

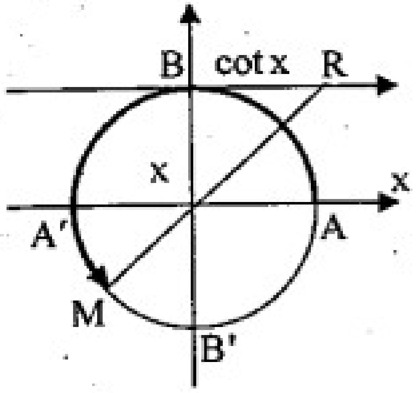
4.1. Định nghĩa

$\tan : D_2 \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \overline{BR} = \cot x$

Kí hiệu : $y = \cot x$; x đo bằng radian.

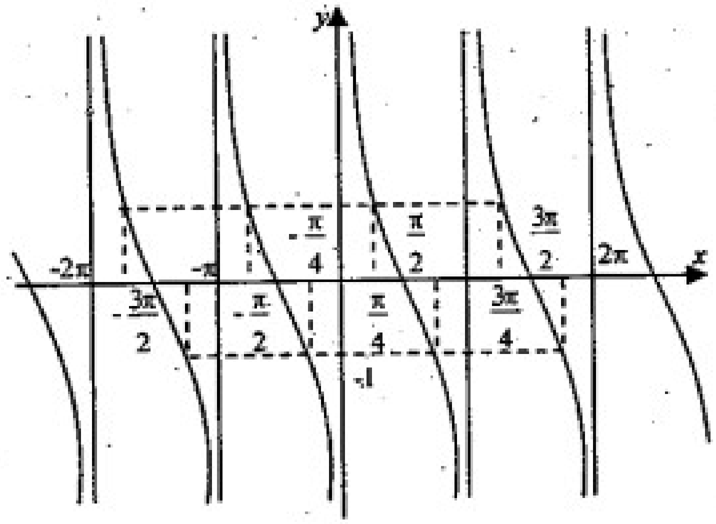
$x \in D_2 = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi | k \in \mathbb{Z} \}$



4.2. Tính chất

- Tập xác định : $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi | k \in \mathbb{Z} \}$
- Tập giá trị : $T = \mathbb{R}$
- Tính tuần hoàn : Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.
- Tính đơn điệu: Nghịch biến trên các khoảng $(k\pi ; \pi + k\pi) , (k \in \mathbb{Z})$.

4.3. Đồ thị :



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

1.1. Phương pháp:

Để tìm tập xác định của các hàm số ta dựa vào các khái niệm sau:

➢ Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là: $D = \{ x \in \mathbb{R} | f(x) \in \mathbb{R} \}$.

➢ Tập xác định của các hàm cơ bản :

- $y = \sin[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định .
- $y = \cos[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- $y = \tan[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định và $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi , (k \in \mathbb{Z})$.
- $y = \cot[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định và $f(x) \neq k\pi , (k \in \mathbb{Z})$.

➢ ***Chú ý :***

- $\frac{A}{B}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B \neq 0$ và A có nghĩa .
- $\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$ và A có nghĩa .

1.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{\sin x - 1} + 1 - \cos^2 x$; b) $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} . \cos x \right)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Vậy tập xác định của hàm số là : $D = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \cos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos x \neq 1 + 2k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 1 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq l\pi , (l \in \mathbb{Z})$$

Vậy tập xác định của hàm số là : $D = \mathbb{R} \setminus \{ l\pi | l \in \mathbb{Z} \}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$; b) $y = \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x - 2\cos x + 4}$.

Lời giải

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x > 0 \Leftrightarrow -\pi + k2\pi < x < k2\pi , (k \in \mathbb{Z})$

Vậy tập xác định của hàm số là : $D = \{ x \in \mathbb{R} | -\pi + k2\pi < x < k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \}$.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \geq 0 \\ \cos^2 x - 2\cos x + 4 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \forall x \end{cases} \Leftrightarrow k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi , (k \in \mathbb{Z}) .$$

Vậy tập xác định của hàm số là : $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,k\pi\le x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$.

2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác

2.1. *Phương pháp:*

Để xét tính chẵn lẻ của các hàm số ta dựa vào các khái niệm sau :

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu :
  - Tập xác định của nó có tính đối xứng $\Leftrightarrow \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.
  - $f(-x)=f(x),\forall x\in D$.
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu :
  - Tập xác định của $f(x)$ có tính đối xứng $\Leftrightarrow \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.
  - $f(-x)=-f(x),\forall x\in D$.
- ***Chú ý :*** Để chứng minh hàm số không có tính chẵn , lẻ ta chứng minh hàm số đó có tập xác định *D* không có tính đối xứng , hoặc

$$\exists x_0\in D:\begin{cases} f(-x_0)\ne f(x_0)\\ f(-x_0)\ne -f(x_0)\end{cases}$$

2.2. *Các ví dụ minh họa*

Ví dụ 3. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau :

a) $y=f(x)=\tan x+\sin x$; b) $y=f(x)=\cos x-\sin x$.

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số $y=f(x)=\tan x+\sin x$ là:

$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$, tức là D có tính đối xứng.

Mặt khác $f(-x)=\tan(-x)+\sin(-x)=-\tan x-\sin x=-f(x),\forall x\in D$

Do đó , hàm số đã cho là hàm số lẻ .

b) Ta có :

$$\left.\begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ne f\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ne -f\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$

Do đó, hàm số đã cho khống chẵn, cũng không lẻ.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau :

a) $y=f(x)=\frac{1}{\sin 2x}$; b) $y=f(x)=\cot^2 x$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\Rightarrow \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$, tức là D có tính đối xứng .

Mặt khác $f(-x)=\frac{1}{\sin 2(-x)}=-\frac{1}{\sin 2x}=-f(x),\forall x\in D$

Do đó, hàm số đã cho là hàm số lẻ .

b) Tập xác định : $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$

Ta thấy nếu $x\in D$ thì $-x\in D$, tức là D có tính đối xứng .

Mặt khác: $f(-x)=\cot^2(-x)=[-\cot x]^2=\cot^2 x=f(x),\forall x\in D$

Do đó , hàm số đã cho là hàm số chẵn .

3. Xét tính tuần hoàn của hàm số lượng giác

3.1. *Phương pháp:*

Để xét tính tuần hoàn của các hàm số ta dựa vào khái niệm sau :

- Hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D, được gọi là hàm số tuần hoàn nếu

$$\exists T\ne 0 \text{ sao cho : }\begin{cases}\forall x\in D\Rightarrow x\pm T\in D\\ f(x+T)=f(x),\forall x\in D\end{cases}$$

- Nếu tồn tại số $T>0$ nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì T được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn $y=f(x)$.

3.2. *Các ví dụ minh họa:*

Ví dụ 5. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì của các hàm số sau :

a) $y=\sin^2 2x+1$; b) $y=\frac{1}{\sin 2x}$.

Lời giải

a) $y=f(x)=\sin^2 2x+1=\frac{1-\cos 4x}{2}+1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x$. $D=\mathbb{R}$

Giả sử : $f(x+T)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 4(x+T)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \cos(4x+4T)=\cos 4x,\forall x\in\mathbb{R}$ (*)

Khi cho $x=0$ thì (*) cũng phải đúng , tức là :

$$\Rightarrow \cos 4T=\cos 0=1\Rightarrow 4T=k2\pi\Rightarrow T=\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$$

Ngược lại , dễ thấy :

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 4\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x+k2\pi)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x,\forall x\in\mathbb{R}$$

Vậy khi $T=\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$ thì ta mới có: $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\Rightarrow x\pm T\in\mathbb{R}\\ f(x+T)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

Tức là $y=f(x)=\sin^2 2x+1$ là hàm số tuần hoàn , mặt khác trong các số $y=\sin x$, thì số dương nhỏ nhất là $y=\sin x$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn có chu kì $T=\frac{\pi}{2}$.

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Giả sử: $f(x+T)=f(x),\forall x\in D$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sin 2(x+T)}=\frac{1}{\sin 2x},\forall x\in D\Leftrightarrow\sin(2x+2T)=\sin 2x,\forall x\in D\ (*)$$

Khi cho $x=\frac{\pi}{4}$ thì (*) cũng phải đúng, tức là:

$$\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{2}+2T\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow\frac{\pi}{2}+2T=\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

$$\Rightarrow 2T=k2\pi\Rightarrow T=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$$

Ngược lại, dễ thấy: $\frac{1}{\sin 2(x+k\pi)}=\frac{1}{\sin(2x+2k\pi)}=\frac{1}{\sin 2x},\forall x\in D$

Vậy, chỉ $\forall T=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ thì ta mới có: $\begin{cases}x\in D\Rightarrow x\pm T\in D\\ f(x+T)=f(x),\forall x\in D\end{cases}$

Tức là $y=f(x)=\frac{1}{\sin 2x}$ là hàm số tuần hoàn.

Mặt khác trong các số $T=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$, thì số dương nhỏ nhất là $T=\pi$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn có chu kì $T=\pi$.

Ví dụ 6. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì của các hàm số sau:

a) $y=A.\sin(\omega.t+\alpha)+B$; b) $y=A.\cos(\omega.t+\alpha)+B$.

$(A,B,\omega,\alpha$ là hằng số, $A.\omega\neq 0)$.

Lời giải

a) $y=f(t)=A.\sin(\omega.t+\alpha)+B$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Giả sử: $f(t+T)=f(t),\forall t\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow A.\sin(\omega.t+\omega.T+\alpha)+B=A.\sin(\omega.t+\alpha)+B,\forall t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\sin(\omega.t+\omega.T+\alpha)=\sin(\omega.t+\alpha),\forall t\in\mathbb{R}\ (*)$$

Khi cho $t=\frac{\pi-2\alpha}{2\omega}$ thì (*) cũng phải đúng, tức là:

$$\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega T\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow\frac{\pi}{2}+\omega T=\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

$$\Rightarrow\omega.T=k2\pi\Rightarrow T=\frac{k2\pi}{\omega},(k\in\mathbb{Z})$$

Ngược lại, dễ thấy:

$$\sin\left[\omega.\left(t+\frac{k2\pi}{\omega}\right)+\alpha\right]=\sin(\omega.t+\alpha+k2\pi)=\sin(\omega.t+\alpha),\forall t\in\mathbb{R}$$

Vậy, chỉ $T=\frac{k2\pi}{\omega},(k\in\mathbb{Z})$ thì ta mới có: $\begin{cases}t\in\mathbb{R}\Rightarrow t\pm T\in\mathbb{R}\\ f(t+T)=f(t),\forall t\in\mathbb{R}\end{cases}$

Tức là $y=f(t)=A.\sin(\omega.t+\alpha)+B$ là hàm số tuần hoàn, mặt khác trong các số $T=\frac{k2\pi}{\omega},(k\in\mathbb{Z})$, thì số dương nhỏ nhất là $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn có chu kì $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

b) $y=f(t)=A.\cos(\omega.t+\alpha)+B$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Giả sử: $f(t+T)=f(t),\forall t\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow A.\cos(\omega.t+\omega.T+\alpha)+B=A.\cos(\omega.t+\alpha)+B,\forall t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\cos(\omega.t+\omega.T+\alpha)=\cos(\omega.t+\alpha),\forall t\in\mathbb{R}\ (*)$$

Khi cho $t=-\frac{\alpha}{\omega}$ thì (*) cũng phải đúng, tức là:

$$\Rightarrow\cos(\omega T)=\cos 0=1\Rightarrow\omega T=k2\pi\ \Rightarrow\omega.T=k2\pi\Rightarrow T=\frac{k2\pi}{\omega},(k\in\mathbb{Z})$$

Ngược lại, dễ thấy:

$$\cos\left[\omega.\left(t+\frac{k2\pi}{\omega}\right)+\alpha\right]=\cos(\omega.t+\alpha+k2\pi)=\cos(\omega.t+\alpha),\forall t\in\mathbb{R}$$

Vậy, chỉ $T=\frac{k2\pi}{\omega},(k\in\mathbb{Z})$ thì ta mới có: $\begin{cases}t\in\mathbb{R}\Rightarrow t\pm T\in\mathbb{R}\\ f(t+T)=f(t),\forall t\in\mathbb{R}\end{cases}$

Tức là $y=f(t)=A.\cos(\omega.t+\alpha)+B$ là hàm số tuần hoàn, mặt khác trong các số $T=\frac{k2\pi}{\omega},(k\in\mathbb{Z})$, thì số dương nhỏ nhất là $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn có chu kì $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số lượng giác

4.1. Phương pháp: Ta thực hiện theo các bước sau:

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Xét tính tuần hoàn, tìm chu kì (nếu có).
- Lập bảng biến thiên trên một chu kì để suy ra tính đơn điệu.
- Vẽ đồ thị trên chu kì đó, từ đó suy ra đồ thị trên toàn miền xác định.

4.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 7. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=1-\sin x$; b) $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

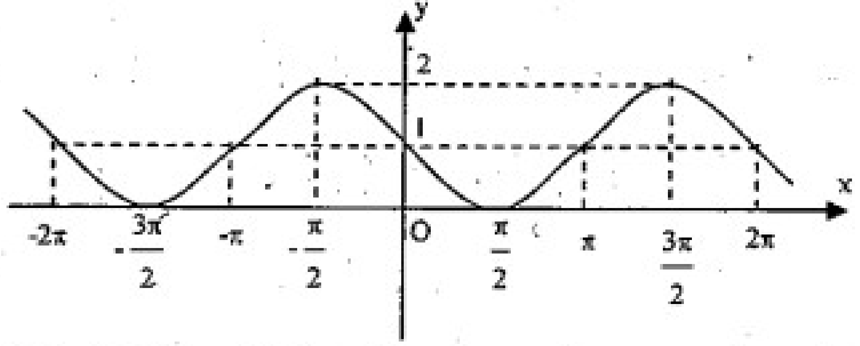
a) Dễ thấy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$ và $y=1-\sin x$ là hàm số tuần hoàn có chu kì $T=2\pi$.

Nên ta chỉ cần lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số trên một chu kì $[-\pi;\pi]$, từ đó suy ra các chu kì khác.

Xét $x\in[-\pi;\pi]$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y	1	↗	2	↘	1	↘	0	↗	1

Đồ thị:

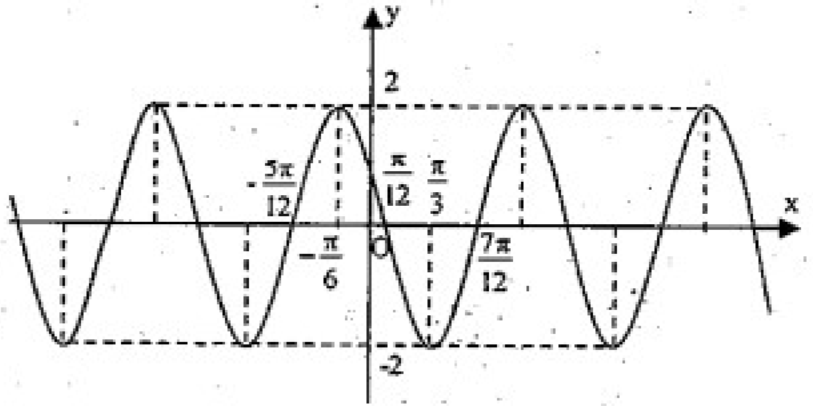


b) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$ và hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn có chu kì $T=\pi$.

Nên ta chỉ cần lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số trên một chu kì, từ đó suy ra các chu kì khác.

x	$-\frac{5\pi}{12}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{12}$
$2x+\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{12}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y	0	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	0

Đồ thị:



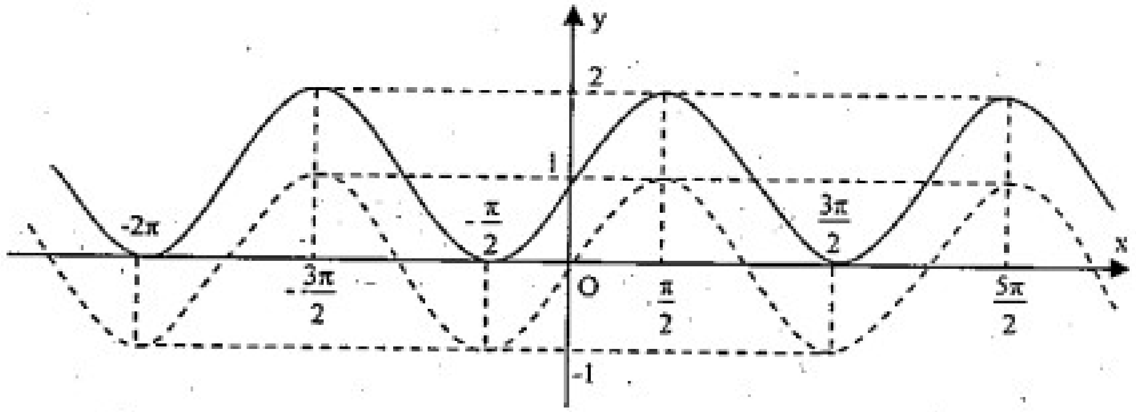
Ví dụ 8. Từ đồ thị của hàm số $y=\sin x$ hãy suy ra đồ thị của các hàm số:

a) $y=\sin x+1$; b) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Lời giải

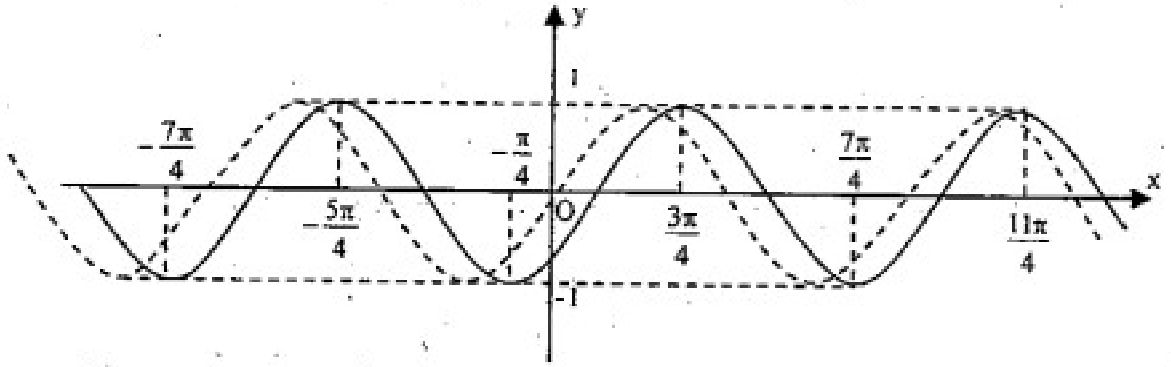
a) Từ đồ thị của hàm số $y=\sin x$ tịnh tiến theo véc tơ $\overline{u}=(0;1)$, ta sẽ được đồ thị của hàm số: $y=\sin x+1$.

Đồ thị:



b) oTừ đồ thị của hàm số $y=\sin x$ tịnh tiến theo véc tơ $\overline{u}=\left(\pi/4;0\right)$, ta sẽ được đồ thị của hàm số: $y=\sin\left(x-\pi/4\right)$.

Đồ thị:



Ví dụ 9. Vẽ đồ thị của hàm số $y=\sin x+\cos x$, từ đó hãy suy ra đồ thị của hàm số: $y=|\sin x+\cos x|$.

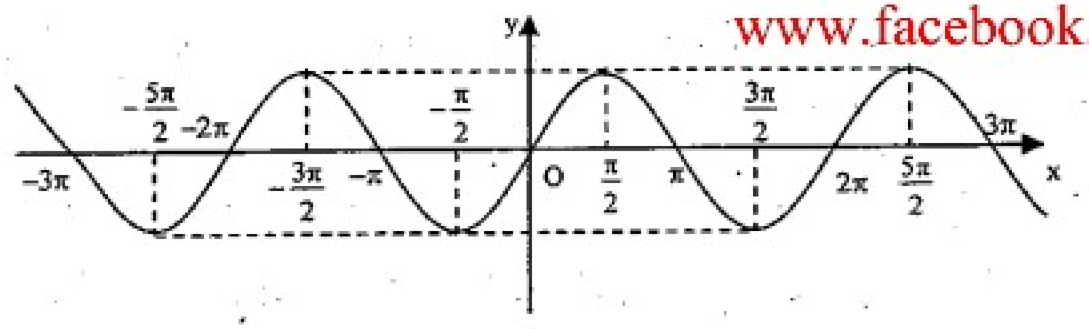
Lời giải

$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ có chu kỳ $T=2\pi$.

Vậy, để vẽ đồ thị của hàm số $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, ta thực hiện như sau:

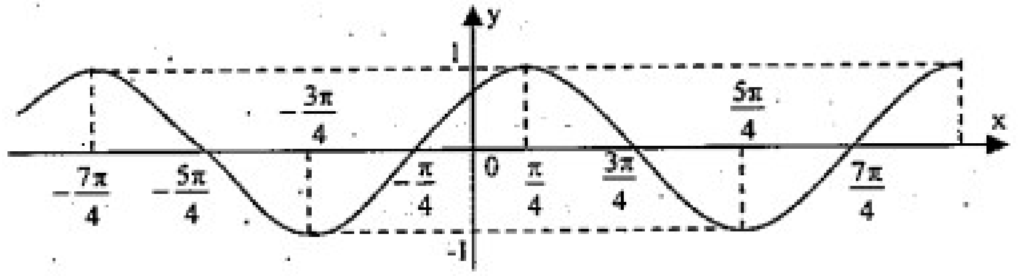
+ Vẽ đồ thị $y=\sin x$ (C_1).

THƯ VIỆN BÌNH ĐỊNH
PHÒNG MƯỢN
W 16907

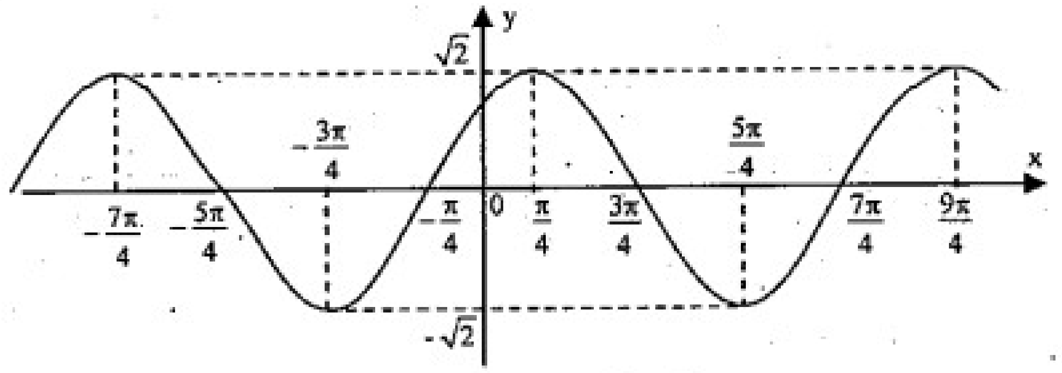


+ Tịnh tiến (C) theo véctơ $\overline{u}=\left(-\frac{\pi}{4};0\right)$, ta được đồ thị của hàm số

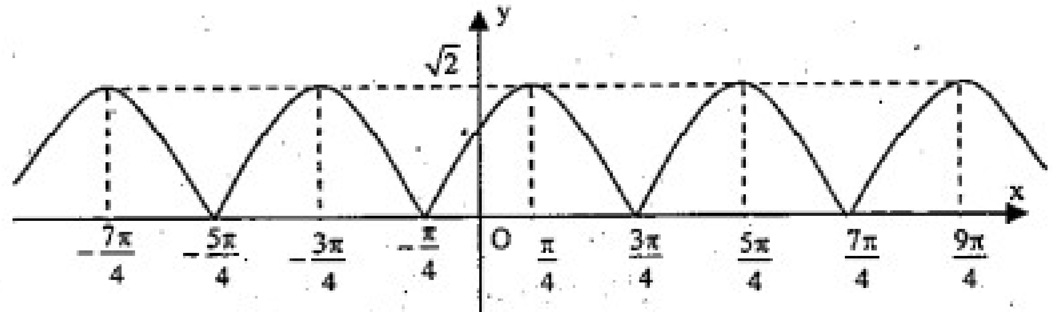
$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ (C_2).$$



+ Giãn theo phương trục tung về hai phía của trục hoành theo hệ số $k=\sqrt{2}$ ta được đồ thị (C): $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$



+ Giữ nguyên phần phía trên trục hoành, lấy đối xứng qua trục hoành phần phía dưới trục hoành, ta được đồ thị của $y=|\sin x+\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$



4.3. *Chú ý:*

4.3.1. Một số phép biến đổi đồ thị: Giả sử đã biết đồ thị (C) hàm số $y=f(x)$ (trong hệ trục tọa độ *Oxy* với véc tơ đơn vị trên trục *Ox* là $\overline{i}=(1;0)$ và véc tơ đơn vị trên trục *Oy* là $\overline{j}=(0;1)$) Khi đó:

- Đồ thị của hàm số $y=f(x)+b$ có được do tịnh tiến (C) theo véc tơ $b\overline{j}$.
- Đồ thị của hàm số $y=f(x-a)$ có được do tịnh tiến (C) theo véc tơ $a\overline{i}$.
- Đồ thị của hàm số $y=k.f(x)$, $(k\neq 0)$ là ảnh của (C) qua phép co dãn theo phương trục tung (xuống trục hoành) với hệ số co dãn k. Ta có phép co khi $|k|<1$, phép dãn khi $|k|>1$, phép đối xứng qua trục hoành khi $k=-1$.
- Đồ thị của hàm số $y=f(k.x)$, $(k\neq 0)$ là ảnh của (C) qua phép co dãn theo phương trục hoành (về trục tung) với hệ số co dãn $\frac{1}{k}$. Ta có phép dãn khi $|k|<1$, phép co khi $|k|>1$, phép đối xứng qua trục tung khi $k=-1$.

4.3.2. Đồ thị một số hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Từ đồ thị (C) hàm số $y=f(x)$ ta có thể suy ra được đồ thị của một số hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối bằng các cách sau :

- Đồ thị hàm số : $y=|f(x)|$ (C_1).
  - ➢ Ta có : $y=|f(x)|=\begin{cases}f(x) & \text{khi } f(x)\geq 0\\ -f(x) & \text{khi } f(x)<0\end{cases}$ (C_1)
  - ➢ Do đó đồ thị (C_1) gồm hai phần :
    - o Phần phía trên trục hoành của (C).
    - o Đối xứng qua *Ox* phần của (C) phía dưới trục hoành.
- Đồ thị hàm số : $y=f(|x|)$ (C_2).
  - ➢ Ta có : $y=f(|x|)=\begin{cases}f(x) & \text{khi } x\geq 0\\ f(-x) & \text{khi } x<0\end{cases}$
  - ➢ Do đó đồ thị (C_2) gồm hai phần :
    - o Phần phía bên phải trục *Oy* của (C).
    - o Đối xứng của phần trên qua *Oy*.

5. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số lượng giác

5.1. Phương pháp :

- Nếu phải tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên một khoảng, đoạn (nhỏ hơn một chu kì của hàm số đó) ta có thể lập bảng biến thiên thiên của hàm số trên khoảng, đoạn đó rồi dựa vào bảng biến thiên suy ra kết quả.
- Nếu phải tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên toàn bộ tập xác định của nó ta có thể biến đổi hàm số về dạng đơn giản nhất rồi dựa vào miền giá trị của hàm số đó để suy ra kết quả .

* ***Chú ý:*** Theo định nghĩa về GTLN ; GTNN của hàm $f(x)$ trên miền D thì ta chỉ cần tìm ra được $x_0 \in D : f(x_0) = M$ và $x_1 \in D : f(x_1) = m$, do đó trong quá trình giải loại toán này nếu việc tìm ra tất cả các giá trị của $x \in D$ để dấu bằng xảy ra phức tạp thì ta chỉ cần chỉ ra một giá trị của x cũng được rồi .

Chẳng hạn trong ví dụ trên ta có thể nói :

$$y = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \sin(2x+\alpha) = 1 \text{ khi } x = \pi/4 - \alpha/2 \text{ với } \cos\alpha = 3/5 .$$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \sin\left(\frac{2x}{x-1}\right)$ b/ $y = \sqrt{1-\sin x}$ c/ $y = \sqrt{2-\sin x}$

d/ $y = \sqrt{1-\cos^2 x}$ e/ $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$ f/ $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

g/ $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ h/ $y = \frac{\sin x}{\cos(x-\pi)}$ i/ $y = \frac{1}{\tan x - 1}$.

Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a/ $y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\sin x}}$; b) $y = \frac{1+\tan x}{\tan x}$

c) $y = \sqrt{1-\sin(x^2+2x-1)}$; d) $y = \frac{1}{\sqrt{3}.\cot x - 1}$

e) $y = \frac{2\sin x + \sqrt{2}}{1-\cos x}$; f) $y = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos 2x}$.

Bài 3. (*) Chứng minh các hàm số sau tuần hoàn và có chu kì là T

a) $y = \sin(a.x+b)\,;\, T = \frac{2\pi}{|a|}$; b) $y = \cos(a.x+b)\,;\, T = \frac{2\pi}{|a|}$

c) $y = \tan(a.x+b)\,;\, T = \frac{\pi}{|a|}$; d) $y = \cot(a.x+b)\,;\, T = \frac{\pi}{|a|}$

Bài 4. Tìm chu kỳ của các hàm số:

a/ $y = \sin 2x$ b/ $y = \cos\frac{x}{3}$ c/ $y = \sin^2 x$

d/ $y = \sin 2x + \cos\frac{x}{2}$ e/ $y = \tan x + \cot 3x$ f/ $y = \cos\frac{3x}{5} - \sin\frac{2x}{7}$

g/ $y = 2\sin x.\cos 3x$ h/ $y = \cos^2 4x$ i/ $y = \tan(-3x+1)$.

Bài 5. Chứng minh hàm số sau là hàm số tuần hoàn, nhưng không có chu kì :

$$y = \sin^2 2x + \cos^2 2x .$$

Bài 6. Xét tính chẵn, lẻ, tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = \sin x.\cos 3x$; b) $y = \sin x.\cos^2 x + \cot x$

c) $y = \sin^2 2x + 1$; d) $y = \sin^2 2x - \cos^2 2x$

e) $y = \cot^2 2x$; f) $y = \sin^6 x - \cos^6 x$.

Bài 7. Xét tính chẵn – lẻ của các hàm số:

a/ $y = 2\sin x + 3$ b/ $y = \sin x + \cos x$ c/ $y = \tan x + \cot x$

d/ $y = \sin^4 x$ e/ $y = \sin x.\cos x$ f/ $y = \tan|x|$

g/ $y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$ h/ $y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$ i/ $y = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos 2x}$

Bài 8. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số sau :

$$y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ trên đoạn } \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Bài 9. Tìm các khoảng mà trên đó các hàm số $y = \sin 2x$; $y = \cos 2x$

a) Cùng đồng biến ; b) Cùng nghịch biến .

Bài 10. Phép đối xứng qua điểm $I\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ biến đồ thị của các hàm số sau thành đồ thị của các hàm số nào ? Hãy vẽ đồ thị của các hàm số vừa tìm được .

a) $y = \sin x$; b) $y = \sin 2x$; c) $y = \cos 2x$; d) $y = \cot x$.

Bài 11. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan(\pi x)$.

Bài 12. Từ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ hãy suy ra đồ thị của các hàm số :

a) $y = -\cos x$; b) $y = |\cos x|$; c) $y = \cos|x|$.

Bài 13. (*) Từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ hãy suy ra đồ thị của các hàm số :

a) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $y = 2\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$; c) $y = \sin\left|\frac{x}{2}\right| - 1$.

Bài 14. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $y = -\cos\left(2x + \pi/3\right)$ trên đoạn $\left[-2\pi/3 ; \pi/3\right]$.

b) $y = \cos \pi x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

c) $y = 3\sin x + 4\cos x$; d) $y = \sin^4 x + \cos^4 x - \frac{3}{4}$

e) $y = 5 + \frac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x$; f) $y = \sqrt{1-\sin(x^2)} - 1$.

Bài 15. (*) Chứng minh rằng mọi giao điểm của đường thẳng $(\Delta): y = \frac{x}{2}$ với đồ thị của hàm số $y = \sin x$ đều cách gốc tọa độ một khoảng nhỏ hơn $\sqrt{5}$.

- ***Chú ý :***

  ➢ Số M được gọi là giá trị lớn nhất *(GTLN)* của $f(x)$ trên X nếu :

  $\begin{cases}\forall x\in X: f(x)\le M\\ \exists x_0\in X: f(x_0)=M\end{cases}$. Kí hiệu : $M=\max\limits_{x} f(x)$.

  ➢ Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất *(GTNN)* của $f(x)$ trên X nếu :

  $\begin{cases}\forall x\in X: f(x)\ge m\\ \exists x_0\in X: f(x_0)=m\end{cases}$. Kí hiệu : $m=\min\limits_{x} f(x)$.

5.2. Các ví dụ minh họa

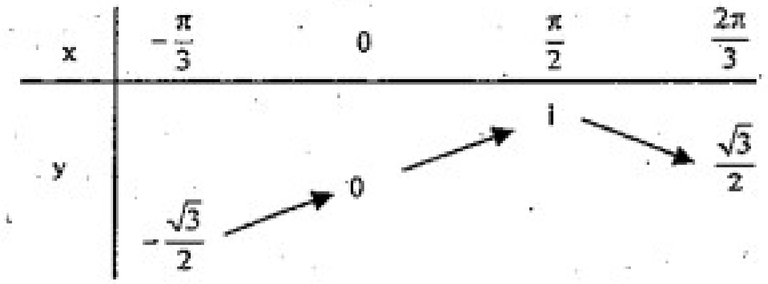
Ví dụ 10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $y=\sin x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$;

b) $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right]$.

Lời giải

a) Ta có , bảng biến thiên của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$:

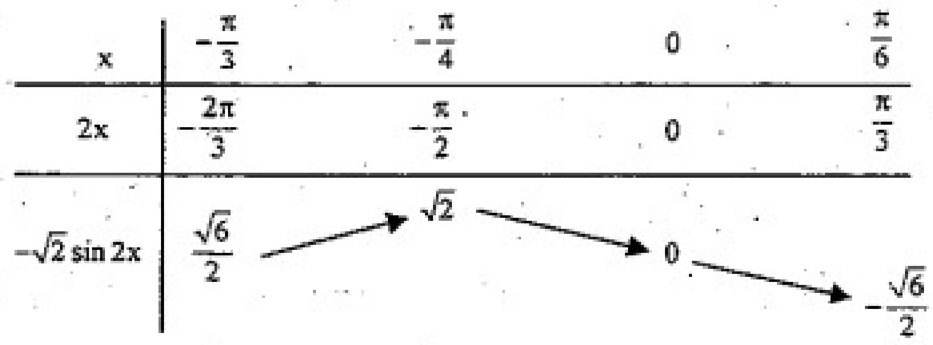


Nhìn vào bảng biến thiên , ta thấy :

$$\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]}(\sin x)=1 \text{ khi } x=\frac{\pi}{2}\ ;\quad \min_{x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]}(\sin x)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ khi } x=-\frac{\pi}{3}.$$

b) $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-2\sin 2x.\sin\dfrac{\pi}{4}=-\sqrt{2}.\sin 2x$

Ta có, bảng biến thiên của hàm số $y=-\sqrt{2}.\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right]$



Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy:

$$\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right]}(y)=\sqrt{2} \text{ khi } x=-\frac{\pi}{4}\ ;\quad \min_{x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right]}(y)=-\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ khi } x=\frac{\pi}{6}.$$

Ví dụ 11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$. b) $y=(2\sin x+\cos x).(2\cos x-\sin x)$.

Lời giải

a) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$,

Mà $-1\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le 1\Rightarrow -2\le y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le 2$, $\forall x\in\mathbb{R}$

* $y=-2\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$

Vậy $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-2$ khi $x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

* $y=2\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=2$ khi $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

b) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y&=(2\sin x+\cos x)(2\cos x-\sin x)\\ &=3\sin x.\cos x+2(\cos^2 x-\sin^2 x)\\ &=\frac{3}{2}\sin 2x+2\cos 2x=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\sin 2x+\frac{4}{5}\cos 2x\right)=\frac{5}{2}\sin(2x+\alpha)\end{aligned}$$

Vì $-1\le\sin(2x+\alpha)\le 1\Rightarrow -\dfrac{5}{2}\le y\le\dfrac{5}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$; trong đó $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

* $y=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow \sin(2x+\alpha)=-1$

$\Leftrightarrow 2x+\alpha=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

Vậy $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-\dfrac{5}{2}$ khi $x=-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

* $y=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow \sin(2x+\alpha)=1$

$\Leftrightarrow 2x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\dfrac{5}{2}$ khi $x=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƯA VỀ DẠNG CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Phương trình:* $\sin u = m$; $m\in\mathbb{R}$, $u=u(x)$, x là ẩn số.

1.1. Tập xác định : $D=\{x\in\mathbb{R}|u(x)\in\mathbb{R}\}$.

1.2. Điều kiện có nghiệm : $-1\le m\le 1$.

1.3. Công thức nghiệm :

$$\sin u=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\alpha+k2\pi\\u=(\pi-\alpha)+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z},\sin\alpha=m).$$

$$\text{Hoặc : }\sin u=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\arcsin m+k2\pi\\u=(\pi-\arcsin m)+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\left(k\in\mathbb{Z},\arcsin m=\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha=m\\-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\right).$$

1.4. Chú ý :

- $\sin u=\sin v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v+k2\pi\\u=\pi-v+k2\pi\end{array}\right.$
- *Các trường hợp đặc biệt*
  - ➢ $\sin u=1\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k2\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$.
  - ➢ $\sin u=-1\Leftrightarrow u=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$.
  - ➢ $\sin u=0\Leftrightarrow u=k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$.

2. *Phương trình:* $\cos u=m$; $m\in\mathbb{R}$, $u=u(x)$, x là ẩn số.

2.1. Tập xác định : $D=\{x\in\mathbb{R}|u(x)\in\mathbb{R}\}$.

2.2. Điều kiện có nghiệm: $-1\le m\le 1$.

2.3. Công thức nghiệm :

$$\cos u=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\alpha+k2\pi\\u=-\alpha+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z},\cos\alpha=m).$$

$$\text{Hoặc : }\cos u=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\arccos m+k2\pi\\u=-\arccos m+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\left(k\in\mathbb{Z},\arccos m=\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\alpha=m\\0\le\alpha\le\pi\end{cases}\right).$$

2.4. Chú ý :

- $\cos u=\cos v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v+k2\pi\\u=-v+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$
- *Các trường hợp đặc biệt*
  - ➢ $\cos u=1\Leftrightarrow u=k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.
  - ➢ $\cos u=-1\Leftrightarrow u=\pi+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.
  - ➢ $\cos u=0\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

3. *Phương trình:* $\tan u=m$; $(m\in\mathbb{R})$, $u=u(x)$, x là ẩn số.

3.1. Tập xác định : $D=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;\begin{cases}u(x)\in\mathbb{R}\\u(x)\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}\right\}$.

3.2. Điều kiện có nghiệm: $\forall m\in\mathbb{R}$.

3.3. Công thức nghiệm: $\tan u=m\Leftrightarrow u=\alpha+k\pi$; $(k\in\mathbb{Z},\tan\alpha=m)$.

Hoặc : $\tan u=m\Leftrightarrow u=\arctan m+k\pi$

$$\left(k\in\mathbb{Z},\arctan m=\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\tan\alpha=m\\-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\end{cases}\right).$$

3.4. Chú ý: $\tan u=\tan v\Leftrightarrow u=v+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

4. *Phương trình:* $\cot u=m$; $m\in\mathbb{R}$, $u=u(x)$, x là ẩn số.

4.1. Tập xác định : $D=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;\begin{cases}u(x)\in\mathbb{R}\\u(x)\ne k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\right\}$.

4.2. Điều kiện có nghiệm: $\forall m\in\mathbb{R}$.

4.3. Công thức nghiệm: $\cot u=m\Leftrightarrow u=\alpha+k\pi$; $(k\in\mathbb{Z},\cot\alpha=m)$.

Hoặc: $\cot u=m\Leftrightarrow u=\operatorname{arccot} m+k\pi$

$$\left(k\in\mathbb{Z},\operatorname{arccot} m=\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\cot\alpha=m\\0<\alpha<\pi\end{cases}\right).$$

4.4. Chú ý: $\cot u=\cot v\Leftrightarrow u=v+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

1. Phương trình lượng giác đưa về dạng cơ bản

1.1. Phương pháp:

- Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa (tìm tập xác định của phương trình).
- Dùng các công thức lượng giác đã học, biến đổi đưa phương trình đã cho về một trong bốn dạng cơ bản, áp dụng công thức nghiệm tổng quát từ đó suy ra nghiệm *x* của phương trình.
- Đối chiếu với điều kiện loại các nghiệm không thỏa mãn các điều kiện.

1.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ b) $\cos\left(3x+30^0\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan(3x+1)=\tan 2$ d) $\cot\left(x+45^0\right)=\tan 30^0$.

Lời giải

a) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$.

b) $\cos\left(3x+30^0\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+30^0=150^0+k.360^0\\3x+30^0=-150^0+k.360^0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=40^0+k.120^0\\x=-60^0+k.120^0\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

c) $\tan(3x+1)=\tan 2\Leftrightarrow 3x+1=2+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}+k\frac{\pi}{3},(k\in\mathbb{Z})$.

d) $\cot\left(x+45^0\right)=\tan 30^0=\cot 60^0$

$\Leftrightarrow x+45^0=60^0+k180^0\Leftrightarrow x=15^0+k180^0,(k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của các phương trình sau trong khoảng đã cho :

a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)$; b) $\tan(x+1)=\tan 2$, $x\in(-1;5)$

c) $\cot\left(x+45^0\right)=\sqrt{3}$, $x\in\left(0^0;420^0\right)$.

Lời giải

a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+l2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+l2\pi\end{array}\right.,(k,l\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{\pi}{2}<k2\pi<\frac{2\pi}{3}\\-\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}+l2\pi<\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.,(k,l\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{4}<k<\frac{1}{3}\\-\frac{7}{12}<l<0\end{array}\right.,(k,l\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\l\in\varnothing\end{array}\right.$

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm $x=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

b) $\tan(x+1)=\tan 2\Leftrightarrow x+1=2+k\pi\Leftrightarrow x=1+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in(-1;5)\Rightarrow -1<1+k\pi<5\Leftrightarrow-\frac{2}{\pi}<k<\frac{4}{\pi},(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=1\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm thỏa yêu cầu : $x=1;x=1+\pi$.

c) $\cot\left(x+45^0\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow x+45^0=30^0+k180^0\Leftrightarrow x=-15^0+k180^0,(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in\left(0^0;420^0\right)\Rightarrow 0^0<-15^0+k180^0<420^0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{12}<k<\frac{29}{12},(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=1\\k=2\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm thỏa yêu cầu : $\left[\begin{array}{l}x=165^0\\x=345^0\end{array}\right.$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $(2\cos x-1)(\sin x+\cos x)=1$ (1)

(Trích ĐTTS vào Học viện Ngân hàng TPHCM, 2000) .

Lời giải

$(1)\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos^2 x-(\sin x+\cos x)=1$

$\Leftrightarrow\sin 2x+1+\cos 2x-(\sin x+\cos x)=1\Leftrightarrow\sin 2x+\cos 2x=\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}=x+\frac{\pi}{4}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{4}=\pi-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.;(k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=\sin^3 4x$ (1)

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Ngoại thương TPHCM, 1999)

Lời giải

$(1)\Leftrightarrow\sin^3 x\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)+\cos^3 x\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)=\sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 3\sin x\cos^3 x-3\cos x\sin^3 x=\sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 3\sin x\cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\sin^3 4x$

$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\sin 2x\cos 2x=\sin^3 4x\Leftrightarrow\frac{3}{4}\sin 4x=\sin^3 4x$

$\Leftrightarrow 3\sin 4x-4\sin^3 4x=0\Leftrightarrow\sin 12x=0\Leftrightarrow 12x=k\pi\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{12},(k\in\mathbb{Z})$.

Biểu diễn các nghiệm của các phương trình sau trên đường tròn lượng giác, từ đó viết gọn lại các công thức nghiệm của các phương trình đó:

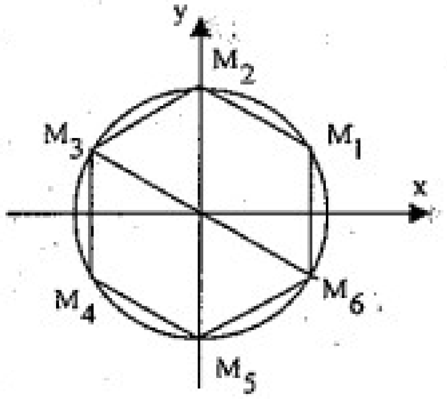
a) $\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ b) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Lời giải

a) $\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow 2\cos 3x.\sin\left(x+\pi/6\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x+\frac{\pi}{6}=k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\ (1)\\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\ (2)\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z})$$



Họ (1) khi biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta được các điểm nghiệm : $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$

Họ (2) khi biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta được các điểm nghiệm : M_3, M_6

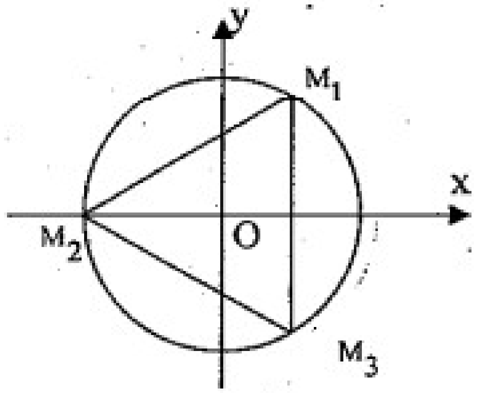
Vậy công thức nghiệm của phương trình có thể viết gọn thành :

$$x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}.\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{3x}{2}=0\\ \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\ \ (1)\\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \ (2)\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$



Họ (1) khi biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta được các điểm nghiệm : M_1, M_2, M_3

Họ (2) khi biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta được điểm nghiệm : M_1

Vậy công thức nghiệm của phương trình có thể viết gọn thành:

$$x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z}).$$

*** Chú ý:*** Công việc trên được gọi là kết hợp các họ nghiệm của phương trình lượng giác (đôi khi rất cần thiết): Cụ thể ta hãy biểu diễn tất cả các họ nghiệm trên đường tròn lượng giác sau đó xem các điểm nghiệm nào cách đều nhau thì ghép thành một công thức và lưu ý nếu có m điểm cách đều nhau thì ghép thành một công thức có dạng $x=\alpha+k\frac{2\pi}{m}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 5. Giải phương trình : $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ (1)

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Giao thông Vận tải, 1999).

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\\ \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$$

Do : $\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

Nên $(1)\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{7}{8} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{7}{8}$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x=\pm\frac{\pi}{3}+l2\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+l\frac{\pi}{2},\ (l\in\mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x=\pm\frac{\pi}{12}+l\frac{\pi}{2},\ (l\in\mathbb{Z})$.

*** Chú ý :*** Việc đối chiếu nghiệm của phương trình với điều kiện đã đặt có nhiều cách khác nhau , nhưng nếu các họ nghiệm đều đơn giản ta nên dùng cách biểu diễn các điểm nghiệm và điều kiện trên đường tròn lượng giác rồi loại các điểm nghiệm của phương trình trùng với các điểm biểu diễn điều kiện.

Chẳng hạn đối với bài trên khi biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta được:

+ Các điểm biểu diễn các điều kiện là : A, B, C, D .

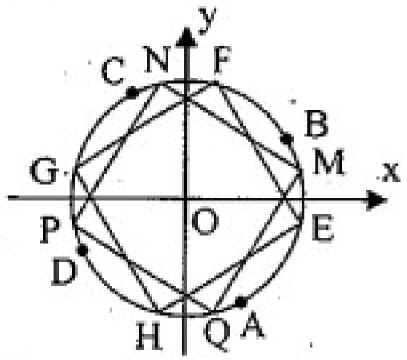
+ Các điểm biểu diễn các họ nghiệm là : M, N, P, Q, E, F, G, H

Dễ thấy các điểm biểu diễn của các họ nghiệm không trùng với các điểm biểu diễn điều kiện

Nên các họ nghiệm của phương trình đều thỏa mãn các điều kiện ban đầu .

Dẫn đến nghiệm của phương trình đã cho là :

$$x=\pm\frac{\pi}{12}+l\frac{\pi}{2},\ (l\in\mathbb{Z}).$$



Ví dụ 6. Giải phương trình :

$$\frac{(1-\cos x)^2+(1+\cos x)^2}{4(1-\sin x)}-\tan^2 x\sin x=\frac{1+\sin x}{2}+\tan^2 x\quad (1)$$

(Trích ĐTTS Trường Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội, 1996) .

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 1\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$

$$(1) \Rightarrow \frac{1+\cos^2 x}{2(1-\sin x)} = \frac{1+\sin x}{2} + (1+\sin x)\tan^2 x$$

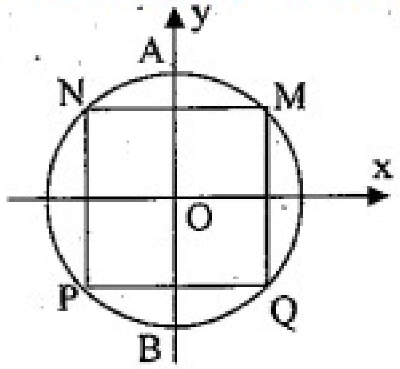
$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos^2 x}{2(1-\sin x)} = (1+\sin x)\left(\frac{1}{2}+\tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos^2 x = 2(1-\sin^2 x)\left(\frac{1}{2}+\tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos^2 x = 2\cos^2 x\left(\frac{1}{2}+\tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos^2 x = \cos^2 x + 2\sin^2 x \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ (l\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2},\ (l\in\mathbb{Z}).$$



So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2},\ (l\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 7. Giải phương trình: $\dfrac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2}} = \tan^2\frac{x}{2}$ (1).

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} \sin^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2} \neq 0 \\ \cos\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^2\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2} - 1\right) \neq 0 \\ \cos\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\cos^4\frac{x}{2} \neq 0 \\ \cos\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi;\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\sin^2 x - 2}{-4\cos^4\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \sin^2 x - 2 = -4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = -\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ (l\in\mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ (l\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 8. Giải phương trình : $\dfrac{3(\sin x + \tan x)}{\tan x - \sin x} - 2\cos x = 2$ (1)

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội, 2000).

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x - \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x(1-\cos x) \neq 0 \end{cases}$

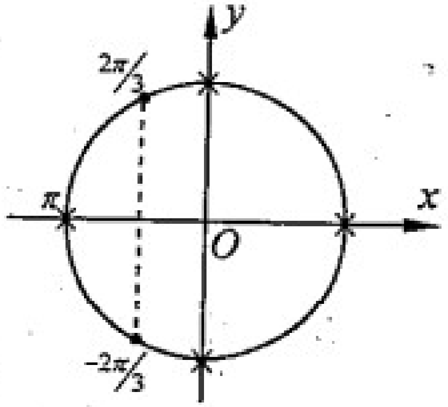
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq l\frac{\pi}{2},\ (l\in\mathbb{Z}).$$

$$(1) \Rightarrow \frac{3\tan x(\cos x + 1)}{\tan x(1-\cos x)} - 2(1+\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1+\cos x)}{1-\cos x} - 2(1+\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(1+2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z})$$



So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 9. Giải phương trình : $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x.\tan\frac{x}{2}\right) = 4$ (1)

(Trích ĐTTS vào Đại học, Cao đẳng, Khối B, 2006).

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos\frac{x}{2} \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$

Ta có : $1 + \tan x.\tan\frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\cos x\cos\frac{x}{2} + \sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}$

$$= \frac{\cos x/2}{\cos x\cos x/2} = \frac{1}{\cos x}$$

Do đó: $(1) \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = 4$

$$\Leftrightarrow 1 = 4\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}\ \text{(thỏa điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + l2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + l\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + l\pi \end{array}\right.\ (l\in\mathbb{Z}).$$

* ***Chú ý :*** Ta có thể tìm các nghiệm thỏa mãn điều kiện bằng cách đối chiếu

các phương trình cơ bản cuối với các điều kiện đã đặt. Chẳng hạn trong ví dụ trên điều kiện là $\sin 2x \neq 0$ mà phương trình đã cho là hệ quả của $\sin 2x = \frac{1}{2}$, nên chắc chắn mọi nghiệm của $\sin 2x = \frac{1}{2}$ đều thỏa điều kiện .

Ví dụ 10. Giải phương trình: $2\sin 3x\left(1-4\sin^2 x\right)=1$ (1).

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin 3x\left[1-4\left(1-\cos^2 x\right)\right]=1 \Leftrightarrow 2\sin 3x\left(4\cos^2 x-3\right)=1 \quad (2)$$

Ta thấy , khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ thì

$$(2) \Leftrightarrow -6.\sin\left(\frac{3\pi}{2}+k3\pi\right)=1 \Leftrightarrow \pm 6 = 1 \text{ (vô lí)}.$$

Vậy $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của phương trình (2)

Nếu nhân hai vế của phương trình (2) cho $\cos x \neq 0$ và được:

$$2\sin 3x\left(4\cos^2 x-3\right)\cos x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin 3x\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 6x = \cos x \Leftrightarrow \sin 6x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = \pi/2 - x + k2\pi \\ 6x = \pi - \left(\pi/2 - x\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \\ x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \quad , \text{(thỏa điều kiện } \cos x \neq 0\text{)} .$$

1.3. Bài tập áp dụng:

Bài 1. Giải các phương trình sau :

a) $\sin\left(5x+\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$; b) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\cot\left(45^0-x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $\tan(x+3)=\cot\left(2+\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 2. Tìm nghiệm của các phương trình sau trong khoảng đã cho :

a) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{8\pi}{3}\right)$.

b) $\tan\left(x+15^0\right)=\cot 45^0$, $x \in \left(-105^0;512^0\right)$.

c) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, $x \in \left(-\pi;\frac{4\pi}{3}\right)$.

Bài 3. Giải các phương trình sau :

a) $\sin^2 2x+\cos^2 3x=1$.

b) $\sin^2\left(5x+\frac{2\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{4}+\pi\right)$. c) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau :

a) $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

b) $\sin\left(x+24^0\right)+\cos\left(x+144^0\right)=\sin 15^0$.

c) $\sqrt{2}\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)=\sin x+\cos x$.

Bài 5. (*) Giải các phương trình sau :

a) $\cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{4}$

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Mở Hà Nội, 2000)

b) $\cos 10x+2\cos^2 4x+6\cos 3x\cos x=\cos x+8\cos x\cos^3 3x$ (1)

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội, 1998).

c) $16\sin x.\cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x=-1$.

d) $\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x=\frac{2+3\sqrt{2}}{8}$ *(Dự bị A_1 – 2006).*

e) $\left(\sin 2x+\cos 2x\right)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$ *(Khối B – 2010).*

Bài 6. (*) Giải các phương trình sau :

a) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. b) $\cos 4x-4\cos 2x=5$.

c) Tìm nghiệm $x \in (0;\pi)$ của $\frac{\sin 3x-\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\cos 2x+\sin 2x$.

Bài 7. (*) Giải các phương trình sau :

a) $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ (1)

(Trích ĐTTS vào Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, 1999).

b) $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$. *(Trích ĐTTS vào ĐHQG Hà Nội , 1999).*

c) $\sin^2 4x-\cos^2 6x=\sin\left(10,5\pi+10x\right)$, $\left(x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$

(Trích ĐTTS vào ĐH Dược Hà Nội , 1999).

Bài 8. (*) Giải các phương trình sau :

a) $\frac{\cot^2 2x-1}{2\cot 2x}-\cos 8x.\cot 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. b) $\frac{\sqrt{2}\cos x-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{2}\sin x}=1$.

c) $\dfrac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} = 9$.

Bài 9. (*) Giải các phương trình sau :

a) $\tan^2 x + \cot^2 x + \cot^2 2x = \dfrac{11}{3}$

(Trích ĐTTS vào Học viện Ngân hàng TPHCM, 2000) .

b) $2\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right).\cos x = 1$. *(Dự bị $D_1 - 2007$)* .

c) $\sqrt{\dfrac{1}{8\cos^2 x}} = \sin x$. *(Dự bị $D_2 - 2002$)* .

Bài 10. (*) Giải các phương trình sau :

a) $\tan^4 x + 1 = \dfrac{\left(2 - \sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$; b) $2\tan x + \cot 2x = 2\sin 2x + \dfrac{1}{\sin 2x}$.

c) $2\tan x + \cot x = \sqrt{3} + \dfrac{2}{\sin 2x}$; d) $\tan^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$.

Bài 11. (*) Giải các phương trình sau :

a) $2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$. b) $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$.

c) $\dfrac{\cot^2 x - \tan^2 x}{\cos 2x} = 16\left(1 + \cos 4x\right)$.

Bài 12. (*) Giải các phương trình sau :

a) $\dfrac{1}{\tan x + \cot 2x} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\cos x - \sin x\right)}{\cot x - 1}$.

b) $\tan x - \sin 2x - \cos 2x + 2\left(2\cos x - \dfrac{1}{\cos x}\right) = 0$.

c) $\tan^2 x = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$.

d) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ *(Dự bị $A_1 - 2005$)* .

e) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - 3\tan^2 x = \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$ *(Dự bị $B_2 - 2005$)* .

f) $\left(2\sin^2 x - 1\right)\tan^2 2x + 3\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0$ *(Dự bị $B_1 - 2006$)* .

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình bậc nhất, bậc 2 đối với một hàm số lượng giác

1.1. Khái niệm:

- ***Phương trình bậc nhất***

$$a.\sin v + b = 0 \text{ hoặc } a.\cos v + b = 0$$
$$\text{hoặc } a.\tan v + b = 0 \text{ hoặc } a.\cot v + b = 0.$$

- ***Phương trình bậc hai***

$$a.\sin^2 v + b.\sin v + c = 0 \text{ hoặc } a.\cos^2 v + b.\cos v + c = 0$$
$$\text{hoặc } a.\tan^2 v + b.\tan v + c = 0 \text{ hoặc } a.\cot^2 v + b.\cot v + c = 0.$$

1.2. Cách giải: Đặt ẩn phụ đưa về phương trình đại số, giải phương trình đại số tìm giá trị của ẩn phụ, ta được các phương trình lượng giác cơ bản.

2. Phương trình bậc nhất đối với sin*u* và cos*u*

2.1. Khái niệm:

Là các phương trình sau khi biến đổi và rút gọn có dạng :

$$a.\sin u + b.\cos u = c$$

(*a ; b ;c* là các hằng số và $a^2 + b^2 \neq 0$) .

2.2. Cách giải : Vì $a^2 + b^2 \neq 0$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Mặt khác : $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$.

Nên ta có thể đặt : $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\alpha$; $\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\alpha$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \cos(u - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

Đây là phương trình lượng giác cơ bản đã biết cách giải .

3. Phương trình thuần nhất đối với sin*u* và cos*u*

3.1. Khái niệm : Là các phương trình sau khi biến đổi và rút gọn có dạng :

$$a.\sin^2 u + b.\sin u.\cos u + c.\cos^2 u = 0 \quad (1)$$

(a, b, c là các hằng số và $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) .

3.2. Cách giải :

- *Cách 1:* Xét các trường hợp

  * Khi $\cos u = 0$ (hoặc $\sin u = 0$) có thỏa mãn phương trình không.

  * Khi $\cos u \neq 0$ (hoặc $\sin u \neq 0$) chia hai vế cho $\cos^2 u$ (hoặc $\sin^2 u$) để đưa về phương trình bậc 2 đối với $\tan u$ (hoặc $\cot u$) .

- *Cách 2:* Dùng các công thức :

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \; ; \; \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2} \; ; \; \sin u.\cos u = \frac{1}{2}\sin 2u .$$

để đưa phương trình đã cho về dạng bậc nhất đối với sin2*u* và cos2*u*.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. Phương trình dạng đa thức đối với một hàm số lượng giác

1.1. Khái niệm:

Là các phương trình sau khi biến đổi và rút gọn có dạng một đa thức đối với một hàm số lượng giác của một đối số nào đó:

$$a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots\dots + a_1 u + a_0 = 0$$

Với $u = \sin v$ hoặc $u = \cos v$ hoặc $u = \tan v$ hoặc $u = \cot v$

1.2. Phương pháp giải:

- Dùng các công thức lượng giác đã học, biến đổi đưa phương trình đã cho về dạng chỉ chứa một hàm số lượng giác với một đối số. Đặt biểu thức đó bằng một ẩn phụ ta được một phương trình đại số, giải tìm giá trị của ẩn phụ ta sẽ được một phương trình cơ bản.
- Khi đặt ẩn phụ nếu cần hãy đặt điều kiện thích hợp để loại bớt các nghiệm không phù hợp. Khi phương trình quá đơn giản ta có thể giải ngay để được phương trình cơ bản mà không cần đặt ẩn phụ.

1.3. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Giải các phương trình :

a) $\cos 4x + \cos 2x - 2 = 0$; b) $4\sin^4 2x + 12\cos^2 2x - 7 = 0$.

Lời giải

a) $\cos 4x + \cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\dfrac{3}{2} \quad (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $4\sin^4 2x + 12\cos^2 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow 4\left(1 - \cos^2 2x\right)^2 + 12\cos^2 2x - 7 = 0$

Đặt $t = \cos^2 2x$, $(0 \le t \le 1)$, khi đó ta được :

$$4(1-t)^2 + 12t - 7 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{3}{2} \ (\text{loại}) \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình :

a) $\cot^2 2x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\cot 2x - \sqrt{3} = 0$;

b) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \left(1 + \sqrt{3}\right)\tan x - 1 + \sqrt{3} = 0$.

Lời giải

a) $\cot^2 2x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\cot 2x - \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot 2x = 1 \\ \cot 2x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

d) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \left(1 + \sqrt{3}\right)\tan x - 1 + \sqrt{3} = 0$. Điều kiện $\cos x \ne 0$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\tan x - 1 + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, suy ra nghiệm của phương trình là : $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{3}{2} = 0$ (1).

(Trích ĐTTS vào Đại học, Cao đẳng, Khối D, 2005)

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\left(-\cos 4x + \sin 2x\right) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 2x + \left(2\sin^2 2x - 1 + \sin 2x\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2 \ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 4. Giải phương trình : $\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0$ (1)

(Trích ĐTTS vào Đại học, Cao đẳng, Khối A, 2005).

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1 + \cos 6x}{2}\right)\cos 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(4\cos^3 2x - 3\cos 2x\right)\cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 2x = 1\\ \cos^2 2x = -\dfrac{1}{4}\ \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0 \quad (1)$

(Trích ĐTTS vào Đại học, Cao đẳng, Khối D, 2006) .

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos^2 x - 1 - \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)\left(2\cos^2 x + 3\cos x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\\ \cos x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\\ x = \pi + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 6. Giải phương trình: $\dfrac{2\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0 \quad (1)$

(Trích ĐTTS vào Đại học, Cao đẳng, Khối A, 2006) .

Lời giải

Điều kiện : $\sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi/4 + k2\pi \\ x \neq 3\pi/4 + k2\pi \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z}).$

$$(1) \Rightarrow 2\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - \sin x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - 3\sin^2 x\cos^2 x\right) - \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = -\dfrac{4}{3}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + l\pi\ (l\in\mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x = \dfrac{5\pi}{4} + m2\pi\ (m\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 7. Tìm các nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình :

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x \quad (1)$$

(Trích ĐTTS vào Đại học, Cao đẳng, Khối A, 2002) .

Lời giải

Điều kiện : $\sin 2x \neq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x \neq \dfrac{7\pi}{12} + l\pi \end{cases} \quad (k,l\in\mathbb{Z}).$

Ta có :
$$\begin{aligned}\cos 3x + \sin 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x\\ &= 4\left(\cos^3 x - \sin^3 x\right) - 3(\cos x - \sin x)\\ &= (\cos x - \sin x)\left[4(1 + \sin x\cos x) - 3\right]\\ &= (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x)\end{aligned}$$

Do đó : $(1) \Leftrightarrow 5(\sin x + \cos x - \sin x) = 3 + 2\cos^2 x - 1$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = 2\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + m2\pi,\ m\in\mathbb{Z}.$$

Mà $x\in(0;2\pi) \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{3}$.

So với điều kiện, ta có các nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ và } x = \frac{5\pi}{3}.$$

1.4. Bài tập áp dụng:

Bài 1. Giải các phương trình:

a) $4\sin^2 x - 2\left(\sqrt{3} + 1\right)\sin x + \sqrt{3} = 0$.

b) $4\cos^5 x.\sin x - 4\sin^5 x.\cos x = \sin^2 4x - 2$.

c) $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$.

d) $\dfrac{1}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x = 5$.

Bài 2. Giải các phương trình :

a) $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \dfrac{1}{4}\sin^2 2x - 2 = 0$.

b) $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$.

c) $\sin 3(x + \pi) - \sin 2(x + 2\pi) - \sin(x + 3\pi) = 0$.

d) $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

e) Tìm nghiệm $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình :

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x.$$

Bài 3. Giải các phương trình :

a) $\cot x = \tan x + \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}$. *(Dự bị D_2 – 2003).*

b) $\sin x\cos 2x + \cos^2 x\left(\tan^2 x - 1\right) + 2\sin^3 x = 0$.

c) $\dfrac{\cos x\left(\cos x + 2\sin x\right) + 3\sin x\left(\sin x + \sqrt{2}\right)}{\sin 2x - 1} = 1$.

d) $48 - \dfrac{1}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\sin^2 x}\left(1 + \cot 2x\cot x\right) = 0$.

e) $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \dfrac{1}{\cos x}$.

Bài 4.(*) Giải các phương trình :

a) $5\sin x - 2 = 3\left(1 - \sin x\right)\tan^2 x \quad (1)$ *(Khối B, 2004).*

b) $2\tan x + \cot 2x = 2\sin 2x + \dfrac{1}{\sin 2x}$.

(Trích ĐTTS vào Đại học Quốc gia Hà Nội, 1998).

c) $\dfrac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)} = \cos^4 4x$

(Trích ĐTTS vào Đại học Quốc gia Hà Nội, 1999).

d) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin x} = \tan x - \cot x$. *(Dự bị B_2 – 2007).*

e) $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x.\cos x + 1 = 3\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)$ *(Dự bị A_2 – 2007).*

f) $3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4\sin x.\cos^2\dfrac{x}{2}$ *(Dự bị B_2 – 2008).*

g) $4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \cos 4x + \sin 2x = 0$ *(Dự bị D_1 – 2008).*

h) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} - \dfrac{1}{2}\cot 2x = \dfrac{1}{8\sin 2x}$ *(Dự bị A_2 – 2002).*

i) $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$ *(Khối B – 2003).*

j) $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$ *(Dự bị B_1 – 2003).*

k) $\dfrac{(1 + \sin x + \cos 2x)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

(Khối A – 2010).

2. Phương trình bậc nhất đối với sin*u* và cos*u*

2.1. *Khái niệm:*

Là các phương trình sau khi biến đổi và rút gọn có dạng:

$$a.\sin u + b.\cos u = c \quad (1)$$

(*a; b; c* là các hằng số và $a^2 + b^2 \neq 0$).

2.2. *Phương pháp giải :*

- ***Cách 1 :*** Vì $a^2 + b^2 \neq 0$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Mặt khác : $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$.

Nên ta có thể đặt : $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$; $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \cos(u - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (2)$$

Đây là phương trình lượng giác cơ bản đã biết cách giải .

- ***Cách 2 :***

Chia hai vế của phương trình cho $a \neq 0$: $\sin u + \dfrac{b}{a}\cos u = \dfrac{c}{a}$

Đặt $\dfrac{b}{a} = tg\varphi$, $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, ta có : $\sin u + tg\varphi\cos u = \dfrac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow \sin u\cos\varphi + \sin\varphi\cos u = \frac{c}{a}\cos\varphi \Leftrightarrow \sin(u + \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

- ***Cách 3 :***

Xét $x = \pi + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ có là nghiệm của phương trình hay không.

Khi $x \neq \pi + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$, ta có :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Phương trình đã cho tương đương với :

$$a\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + b\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = c \Leftrightarrow (b+c)t^2 - 2at + c - b = 0.$$

Giải (2) tìm *t* , dẫn đến được phương trình cơ bản $\tan\dfrac{x}{2} = t$.

2.3. *Chú ý :*

- Nếu $c = 0$ thì nên đưa về dạng : $a.\tan u + b = 0$ bằng cách chia hai vế của phương trình cho $\cos u$.
- Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$.
- Ta có : $a.\sin u + b.\cos u = \sqrt{a^2+b^2}.\sin(u + \alpha)$

  Nên $-\sqrt{a^2+b^2} \leq a.\sin u + b.\cos u \leq \sqrt{a^2+b^2}$.

  Tức là : $\max(a.\sin u + b.\cos u) = \sqrt{a^2+b^2}$

  và $\min(a.\sin u + b.\cos u) = -\sqrt{a^2+b^2}$.

2.4. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Giải phương trình : $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}$ (1)

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Huế, 1999).

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin 2x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x=\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2x+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{24}+k\pi\\ x=\frac{7\pi}{24}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x$ (1)

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Mỏ- Địa chất, 1995)

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow\left(3\sin 3x-4\sin^3 3x\right)-\sqrt{3}\cos 9x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin 9x-\sqrt{3}\cos 9x=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(9x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 9x-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{9}\\ x=\frac{7\pi}{54}+k\frac{2\pi}{9}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\cos 7x.\cos 5x-\sqrt{3}.\sin 2x=1-\sin 7x.\sin 5x$ (1)

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Mỹ thuật Công nghiệp Hà Nội, 1996)

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow\left(\cos 7x\cos 5x+\sin 7x\sin 5x\right)-\sqrt{3}\sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=3$ (1)

(Trích ĐTTS vào Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, 2001)

Lời giải

Ta có:

- $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\Rightarrow 4\sin^3 x=3\sin x-\sin 3x$
- $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\Rightarrow 4\cos^3 x=3\cos x+\cos 3x$

Do đó : $(1)\Leftrightarrow(3\sin x-\sin 3x)\cos 3x+(3\cos x+\cos 3x)\sin 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=3$

$$\Leftrightarrow 3(\sin x\cos 3x+\sin 3x\cos x)+3\sqrt{3}\cos 4x=3$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x=1\Leftrightarrow \sin 4x+\tan\frac{\pi}{3}.\cos 4x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos 4x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 4x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\left(2+\sqrt{3}\right)\sin x-\cos x=2+\sqrt{3}$ (1)

Lời giải

- Nhận xét : $x=\pi+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$ không thỏa phương trình.
- Xét $x\neq\pi+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$

$$(1)\Rightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}=2+\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{3}\right)t^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)t+3+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\tan\frac{x}{2}=1\\ \tan\frac{x}{2}=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 6. Giải phương trình: $\tan x-3\cot x=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$ (1)

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Thủy lợi Hà Nội, 2000)

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-3.\frac{\cos x}{\sin x}=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x-3\cos^2 x=4\sin x\cos x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)=2\sin 2x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x-2\sin 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x+\sqrt{3}\cos x=0 & (a)\\ \sin x-\sqrt{3}\cos x-2\sin 2x=0 & (b)\end{array}\right.$$

* *Giải (a) :* $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0\Leftrightarrow \tan x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+l\pi,\ (l\in\mathbb{Z})$.

* *Giải (b):* $\sin x-\sqrt{3}\cos x-2\sin 2x=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin 2x\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=x-\frac{\pi}{3}+l2\pi\\ 2x=\pi-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+l2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{3}+l2\pi\\ x=\frac{4\pi}{9}+l\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.,\ (l\in\mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình:

$$x=-\frac{\pi}{3}+l2\pi \text{ hoặc } x=\frac{4\pi}{9}+l\frac{2\pi}{3},\ (l\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 7. Cho phương trình : $\frac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}=a\quad(1)$

a) Giải phương trình (1) khi $a=\frac{1}{3}$.

b) Tìm *a* để phương trình (1) có nghiệm .

(Dự bị D₁ – 2002).

Lời giải

Ta có : $\sin x-2\cos x+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Do đó : $(1)\Leftrightarrow 2\sin x+\cos x+1=a(\sin x-2\cos x+3)$

$$\Leftrightarrow (a-2)\sin x-(2a+1)\cos x=1-3a\quad(2)$$

a) Khi $a=\frac{1}{3}$: $(2)\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (a-2)^2+(2a+1)^2\geq(1-3a)^2$

$$\Leftrightarrow 2a^2-3a-2\leq 0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq a\leq 2$$

Vậy, giá trị *a* cần tìm là : $-\frac{1}{2}\leq a\leq 2$.

- ***Chú ý :*** Ứng dụng vào điều kiện có nghiệm của phương trình:

$$a.\sin u+b.\cos u=c$$

Ta có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm số bằng phương pháp tìm miền giá trị như sau:

- Tìm miền giá trị của $y=f(x),x\in D$: là tập các giá trị $y_0\in\mathbb{R}$ sao cho phương trình $f(x)=y_0$ có nghiệm $x\in D$.
- Điều kiện ấy (sau khi biến đổi) sẽ được đưa về dạng: $\alpha\leq y_0\leq\beta$. Lúc đó $\alpha=\min\limits_{D}f(x)\,;\beta=\max\limits_{D}f(x)$
- Khi sử dụng phương pháp này từ $\alpha\leq y\leq\beta,\forall x\in D$ ta có quyền kết luận ngay $\alpha=\min\limits_{D}f(x)\,;\beta=\max\limits_{D}f(x)$ mà không cần chỉ ra *x* để $y=\alpha$ hoặc $y=\beta$, vì việc làm đó thường phức tạp, trong khi ta đã biết $y=\alpha$ và $y=\beta$ là các giá trị làm cho phương trình $f(x)=y$ có nghiệm $x\in D$. Tức là chắc chắn tồn tại $x_0\in D:f(x_0)=\alpha$ và $\exists x_1\in D:f(x_1)=\beta$.

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=(3\sin x+4\cos x)(3\cos x-4\sin x)+5.$$

Lời giải

Ta có : $y=(3\sin x+4\cos x)(3\cos x-4\sin x)+5$

$$=12\cos^2 x-7\sin x.\cos x-12\sin^2 x+5$$

$$=6(1+\cos 2x)-\frac{7}{2}\sin 2x-6(1-\cos 2x)+5$$

$$=12\cos 2x-\frac{7}{2}\sin 2x+5$$

Miền giá trị của hàm số trên là $\forall y\in\mathbb{R}$ sao cho phương trình sau :

$$12\cos 2x-\frac{7}{2}\sin 2x+5=y\text{ , có nghiệm } x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 12\cos 2x-\frac{7}{2}\sin 2x=y-5\text{ , có nghiệm } x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 12^2+\left(-\frac{7}{2}\right)^2\geq(y-5)^2$$

$$\Leftrightarrow |y-5|\leq\frac{25}{2}\Leftrightarrow -\frac{25}{2}\leq y-5\leq\frac{25}{2}\Leftrightarrow -\frac{15}{2}\leq y\leq\frac{35}{2}.$$

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}y=\frac{35}{2}$, $\min\limits_{x\in\mathbb{R}}y=-\frac{15}{2}$.

Ví dụ 9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}.$$

Lời giải

Dễ thấy $2\cos x-\sin x+4>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra tập xác định : $D=\mathbb{R}$

Miền giá trị của hàm số trên là $\forall y\in\mathbb{R}$ sao cho phương trình sau :

$$\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}=y\text{, có nghiệm } x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \cos x+2\sin x+3=y\left(2\cos x-\sin x+4\right)\text{, có nghiệm } x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (2y-1)\cos x-(y+2)\sin x=3-4y\text{, có nghiệm } x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (2y-1)^2+(y+2)^2\ge(3-4y)^2 \Leftrightarrow 11y^2-24y+4\le 0\Leftrightarrow \frac{2}{11}\le y\le 2 .$$

Vậy $\underset{x\in\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y=2$; $\underset{x\in\mathbb{R}}{\text{Min}}\, y=\dfrac{2}{11}$.

2.5. Bài tập áp dụng:

Bài 5. Giải các phương trình :

a) $\cos x+2\sqrt{3}\sin x=\dfrac{9}{2}$;

b) $3\cos x+2\sin x=\sqrt{13}\sin 7x$; c) $(\sqrt{3}-1)\sin x-(\sqrt{3}+1)\cos x+\sqrt{3}-1=0$.

Bài 6. Giải các phương trình :

a) $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$; b) $4\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2$;

c) $4\sin^3 x-1=3\sin x-\sqrt{3}\cos 3x$; d) $\sin x+\left(\sqrt{3}-2\right)\cos x=1$;

e) $\left(1+\sqrt{3}\right)\sin x+\left(1-\sqrt{3}\right)\cos x=2$.

Bài 7. Giải các phương trình :

a) $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}\left(\sin 6x+\cos 8x\right)$;

b) $\sin x+\sin 2x=\sqrt{3}\left(\cos x+\cos 2x\right)$; *(Dự bị D_1 – 2004)* .

c) $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4$;

d) $\dfrac{\sin x-\sin 2x}{\cos x-\cos 2x}=\sqrt{3}$; e) $\dfrac{\cos x-2\sin x\cos x}{2\cos^2 x+\sin x-1}=\sqrt{3}$.

Bài 8. (*) Giải các phương trình:

a) $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Hàng hải, 1995) .

b) $2\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)=$

$=\sqrt{3}+4\left[\sin^2 x+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\right]$

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Y Thái Bình, 2001).

c) Tìm nghiệm của phương trình : $\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2}$ (1) thoả mãn điều kiện $\dfrac{2\pi}{5}<x<\dfrac{6\pi}{7}$.

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội, 1997) .

d) $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8$

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Ngoại thương , 1997) .

e) $\dfrac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}=\dfrac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\sin x\right)$.

f) $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x-2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos x-1}=1$ *(Dự bị B_2 – 2003)* .

Bài 9. (*) Giải các phương trình :

a) Tìm nghiệm trên khoảng $(0\,;\pi)$ của phương trình :

$4\sin^2\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$ *(Dự bị D_2 – 2005)* .

b) $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+4\sin x+1=0$ *(Dự bị A_2 – 2006)* .

c) $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}.\cos x=2$. *(Khối D – 2007)* .

d) $\sin^2 x+\sin x.\sin 4x+\cos^2 4x=\dfrac{3}{4}$.

e) $12\cos x+5\sin x+\dfrac{5}{12\cos x+5\sin x+14}+8=0$.

f) $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$. *(Khối A – 2009).*

g) $\sin x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}.\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$ *(Khối B – 2009).*

h) $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x.\cos 2x-\sin x=0$ *(Khối D – 2009).*

Bài 10. Cho phương trình : $\cos x+m\sin x=2$

a) Giải phương trình với $m=\sqrt{3}$.

b) Xác định các giá trị của *m* để phương trình có nghiệm .

Bài 11. Tìm các giá trị của $x\in\left(-\pi\,;\dfrac{5\pi}{2}\right)$ thỏa mãn phương trình sau với mọi *m* :

$$m^2\sin x-m.\sin^2 x-m^2\cos x+m^2\cos^2 x=\sin x-\cos x .$$

Bài 12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $y=\left(2+\sqrt{3}\right)\sin x-\cos x$.

b) $y=2\left(\sin x-\cos x\right)^2+2\cos 2x+6\sin x.\cos x-3$.

c) $y=\dfrac{2\sin x+\cos x+4}{\sin x+\cos x-2}$. d) $y=\dfrac{\cos x+1}{\sin x-\cos x+3}$.

3. Phương trình đẳng cấp đối với sin*u* và cos*u*

3.1. Khái niệm:

- Phương trình đẳng cấp bậc *k* đối với sin*u* và cos*u* là phương trình có dạng $f(\sin u,\cos u)=0$, trong đó:

$$f(t.\sin u\ ;\ t.\cos u)=t^k.f(\sin u\ ;\ \cos u).$$

- Có những phương trình chưa phải dạng đẳng cấp đối với sin*u* và cos*u*, nhưng nếu biết nhân các số hạng chưa đẳng cấp như các số hạng còn lại với $1=\sin^2 u+\cos^2 u$ ta sẽ được một phương trình đẳng cấp.
- Ta có thể nói : phương trình đẳng đối với sin*u* và cos*u* là phương trình có dạng $f(\sin u,\cos u)=0$, trong đó số mũ của sin*u* và cos*u* cùng chẵn, hoặc cùng lẻ.

3.2. Phương pháp giải

Dạng : $a.\sin^2 u+b.\sin u.\cos u+c.\cos^2 u=0 \quad (1)$

Xét các trường hợp

* Khi $a,b,c\neq 0$ thì dễ thấy $\cos u=0$ (hoặc $\sin u=0$) không phải là nghiệm của phương trình, nên $\cos u\neq 0$ (hoặc $\sin u\neq 0$) chia hai vế cho $\cos^2 u$ (hoặc $\sin^2 u$) để đưa phương trình về phương trình bậc 2 với đối với $\tan u$ (hoặc $\cot u$).

* Khi $a=0$ hoặc $c=0$ thì nên đưa phương trình về tích các phương trình đơn giản.

* Khi $b=0$ thì đưa phương trình về dạng : $a\tan^2 u+c=0$.

3.3. Chú ý :

- Nếu phương trình có dạng :

$$a.\sin^2 u+b.\sin u.\cos u+c.\cos^2 u=d \quad (2)$$

thay $d=d(\sin^2 u+\cos^2 u)$ đưa về dạng (1)

- Những phương trình đẳng cấp bậc cao hơn có cách giải tương tự.

3.4. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Giải phương trình :

$$3\sin^2 x+8\sin x\cos x+\left(8\sqrt{3}-9\right)\cos^2 x=0 \quad (1)$$

Lời giải

- Khi $\cos x=0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 3\sin^2 x=0\Leftrightarrow \sin x=0$

$$\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=0 \text{ (vô lí)}.$$

Vậy các giá trị của *x* mà $\cos x=0$ không nghiệm đúng phương trình.

- Khi $\cos x\neq 0$: Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, ta được phương trình: $3\tan^2 x+8\tan x+8\sqrt{3}-9=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-\sqrt{3}\\ \tan x=-\dfrac{8}{3}+\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=\arctan\left(-\dfrac{8}{3}+\sqrt{3}\right)+k\pi\end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2. Giải phương trình :

$$2\sin^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x=-1 .$$

Lời giải

$$2\sin^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x=-1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\sin x.\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x=-\sin^2 x-\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\sin x.\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0 \quad (2)$$

- Khi $\cos x=0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 3\sin^2 x=0\Leftrightarrow \sin x=0$

$$\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=0 \text{ (vô lí)}.$$

Vậy các giá trị của *x* mà $\cos x=0$ không nghiệm đúng phương trình .

- Khi $\cos x\neq 0$: Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, ta được phương trình : $3\tan^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x-1=0 \quad (1)$.

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)+\sin 2x-\sqrt{3}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 4. Giải phương trình : $3\cos^4 x-4\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x=0 \quad (1)$.

Lời giải

- Khi $\cos x=0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow \sin^4 x=0\Leftrightarrow \sin x=0$

$\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=0$ (vô lí). Vậy các giá trị của *x* mà $\cos x=0$ không nghiệm đúng phương trình .

- Khi $\cos x\neq 0$:Chia hai vế của phương trình cho $\cos^4 x$, ta được phương trình : $\tan^4 x-4\tan^2 x+3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan^2 x = 1\\ \tan^2 x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = \pm 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sin 3x + \cos 3x + 2\cos x = 0 \quad (1)$.

(Trích ĐTTS vào Học viện Ngân hàng TPHCM, 1999).

Lời giải

$(1) \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - \cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 4\sin^3 x = \left(\cos x - 3\sin x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 3\cos^3 x + 3\cos^2 x.\sin x - \cos x.\sin^2 x - \sin^3 x = 0$

- Khi $\cos x = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -\sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$

  $\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 0$ (vô lí). Vậy các giá trị của x mà $\cos x = 0$ không nghiệm đúng phương trình.

- Khi $\cos x \neq 0$:Chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$, ta được phương trình: $-\tan^3 x - \tan^2 x + 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\tan x + 1\right)\left(\tan^2 x - 3\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Ví dụ 6. Cho phương trình: $\sin^2 x + \left(2m - 2\right)\sin x\cos x - \left(m + 1\right)\cos^2 x = m \quad (1)$

a) Tìm *m* để phương trình có nghiệm.

b) Giải phương trình khi $m = -2$.

(Trích ĐTTS vào ĐHDLKT TPHCM, 1998).

Lời giải

a) $(1) \Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 2x}{2} + \dfrac{1}{2}\left(2m - 2\right)\sin 2x - \left(m + 1\right)\left(\dfrac{1 + \cos 2x}{2}\right) = m$

$\Leftrightarrow 2\left(m - 1\right)\sin 2x - \left(m + 2\right)\cos 2x = 3m \quad (*)$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 4\left(m - 1\right)^2 + \left(m + 2\right)^2 \geq 9m^2$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 1$.

b) Khi $m = -2$: $(2) \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

3.5. Bài tập áp dụng:

Bài 13. Giải các phương trình :

a) $2\sin^2 x + \sin 2x = 2$.

b) $\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x.\cos x = 1$.

c) $\sqrt{3}\sin^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\sin x.\cos x - \cos^2 x + 1 - \sqrt{3} = 0$.

d) $6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x.\cos x$.

e) $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x.\sin^2 x + \sin x = 0$.

Bài 14. Giải các phương trình :

a) $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$. *(Dự bị D_1 – 2005).*

b) $4\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right) = \cos x + 3\sin x$.

c) $\sin 2x + 2\tan x = 3$.

d) $\sin^2 x\left(1 + \tan x\right) = 3\sin x\left(\cos x - \sin x\right) + 3$.

e) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$.

f) $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x} = 8\sin x$.

Bài 15. (*) Giải các phương trình :

a) $2\cos^3 x = \sin 3x$ *(Học viện KTQS – 1997).*

b) $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x.\sin^2 x + \sin x = 0$ *(ĐH Ngoại thương – 1996).*

c) $\dfrac{\sin 5x}{5\sin x} = 1$. *(ĐH Mỏ Địa chất – 1997).*

d) $1 + 3\sin 2x = 2\tan x$ *(ĐHQG Hà Nội – 1996).*

e) $\cos^3 x + \sin^3 x = 2\left(\cos^5 x + \sin^5 x\right)$ *(ĐHQG Hà Nội – 1998).*

f) $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x.\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x.\cos x$ *(Khối B – 2008).*

Bài 16. Cho phương trình : $\left(m + 1\right)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$. Tìm *m* để phương trình có nghiệm .

Bài 17. Tìm *m* để phương trình :

$$\left(3m - 2\right)\sin^2 x - \left(5m - 2\right)\sin 2x + 3\left(2m + 1\right)\cos^2 x = 0 \text{ vô nghiệm .}$$

Bài 18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = A.\sin^2 x + B.\sin x.\cos x + C.\cos^2 x \quad , \left(A, B, C \in \mathbb{R}\right).$$

Bài 19. Số đo một góc của tam giác vuông ABC là nghiệm của phương trình :

$$\sin^3 x + \sin x.\sin 2x - 3\cos^3 x = 0$$

Chứng minh tam giác ABC vuông cân .

§4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP HAY DÙNG KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Việc giải một phương trình lượng giác nói chung là loại toán không đơn giản vì ta không có con đường tổng quát nào cho việc giải mọi phương trình lượng giác. Thông thường khi gặp một phương trình lượng giác tùy ý, ta nên định hướng theo một số phương pháp giải sau:

1. Phương pháp đưa về dạng tích:

1.1. Khái niệm:

- Dùng các công thức lượng giác thích hợp, áp dụng hằng đẳng thức, nhóm các số hạng, chia đa thức … để biến đổi phương trình cần giải về dạng tích của các phương trình cơ bản hoặc các phương trình đơn giản đã biết cách giải: $A.B.C=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{array}\right.$

- ***Chú ý :***
  - ➢ Một số biểu thức có thừa số chung :
    - * Các biểu thức :

$$1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$$

$$\cos 2x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

$$1+\tan x=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x},\ 1+\cot x=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}$$

Dễ thấy có thừa số chung là : $\sin x+\cos x$.

* Tương tự các biểu thức $1-\sin 2x$; $\cos 2x$; $1-\tan x$; $1-\cot x$ có thừa số chung là : $\sin x-\cos x$.

* Các biểu thức $\sin^2 x;\tan^2 x$ có thừa số chung là : $1-\cos x$ hoặc $1+\cos x$.

* Các biểu thức $\cos^2 x;\cot^2 x$ có thừa số chung là : $1-\sin x$ hoặc $1+\sin x$.

➢ Đây là phương pháp hay dùng nhất khi giải phương trình lượng giác trong các kì thi, muốn làm tốt được phần này các bạn phải thuộc các công thức lượng giác, áp dụng thật linh hoạt các công thức để làm xuất hiện các nhân tử chung .

1.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Giải phương trình: $(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\sin x \quad (1)$

(Trích ĐTTS Đại học, Cao đẳng, Khối D, 2004) .

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin x(2\cos x-1)$$

$$\Leftrightarrow(2\cos x-1)(\sin x+\cos x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \tan x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0 \quad (1)$

(Trích ĐTTS Đại học, Cao đẳng, Khối B, 2005) .

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow\sin x+\cos x+2\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow\sin x+\cos x+2\cos x(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(1+2\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3. Tìm *x* thuộc đoạn $[0\,;14]$ nghiệm đúng phương trình:

$\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0 \quad (1)$ *(Khối D, 2002).*

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x-4(2\cos^2 x-1)+3\cos x-4=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-8\cos^2 x=0\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos x=2\ (VN)\end{array}\right.$$

Do $x\in[0\,;14]\Leftrightarrow 0\le x\le 14 \Leftrightarrow 0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 14\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le k\le\frac{14}{\pi}-\frac{1}{2}$

Mà $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0;1;2;3\}$

Vậy, những giá trị *x* cần tìm là : $\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x \quad (1)$

(Trích ĐTTS Đại học, Cao đẳng, Khối B, 2002) .

Lời giải

$\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x \quad (1)$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1+\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x+\cos 8x=\cos 10x+\cos 12x \Leftrightarrow 2\cos 7x\cos x=2\cos 11x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos 7x-\cos 11x\right)=0 \Leftrightarrow 2\cos x.\sin 9x.\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 9x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k\frac{\pi}{9}\\ x=k\frac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\frac{\pi}{9}\\ x=k\frac{\pi}{2}\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sin 5x-\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ (1)

Lời giải

$$\sin 5x-\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x+\sin x+\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x.\cos 2x+\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x\left(2\sin 3x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin 3x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 3x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 3x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=\frac{7\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right..$$

Ví dụ 6. Giải phương trình : $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\frac{x}{2}=0$ (1)

(Trích ĐTTS Đại học, Cao đẳng, Khối D, 2003).

Lời giải

Điều kiện : $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{2}\left(1+\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\sin^2 x-\left(1+\cos x\right)\cos^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left(1-\cos^2 x\right)-\left(1+\cos x\right)\left(1-\sin^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left(1+\cos x\right)\left(1-\cos x\right)-\left(1+\cos x\right)\left(1+\sin x\right)\left(1-\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left(1+\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=-1\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi/2+l2\pi\\ x=\pi+l2\pi\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+l2\pi\\ x=\pi+l2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+l\pi\end{array}\right. \left(l\in\mathbb{Z}\right).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $\left[\begin{array}{l}x=\pi+l2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+l\pi\end{array}\right. \left(l\in\mathbb{Z}\right).$

Ví dụ 7. Giải phương trình:

$$\sin^2 x.\cos x-\cos 2x+\sin x-\cos^2 x.\sin x-\cos x=0 \quad (1).$$

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow \sin x.\cos x\left(\sin x-\cos x\right)+\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+\sin x-\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin x.\cos x+\sin x+\cos x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\cos x\right)\left(\cos x+1\right)\left(\sin x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ \cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\\ \sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm : $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. , \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

1.3. Bài tập áp dụng

Bài 1. (*) Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$ *(Dự bị A_2 – 2008).*

b) $\tan x=\cot x+4\cos^2 2x$ *(Dự bị A_1 – 2008).*

c) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ *(Dự bị B_1 – 2008).*

d) $\left(1+\sin^2 x\right).\cos x+\left(1+\cos^2 x\right).\sin x=1+\sin 2x$ *(Khối A – 2007).*

Bài 2. (*) Giải các phương trình sau:

a) $\tan^4 x + 1 = \dfrac{\left(2-\sin^2 2x\right).\sin 3x}{\cos^4 x}$ *(Dự bị B_2 – 2002)*.

b) $\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1+\tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$ *(Khối A – 2003).*

c) $3 - \tan x\left(\tan x + 2\sin x\right) + 6\cos x = 0$ *(Dự bị A_1 – 2003)*.

d) $\dfrac{\cos^2 x\left(\cos x - 1\right)}{\sin x + \cos x} = 2\left(1+\sin x\right)$ *(Dự bị D_1 – 2003)*.

e) $\sin 4x \sin 7x = \cos 3x \cos 6x$ *(Dự bị A_2 – 2004)*.

Bài 3. Giải các phương trình sau :

a) $4\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right) = \cos x + 3\sin x$ *(Dự bị B_1 – 2004)*.

b) $\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ *(Dự bị B_2 – 2004)*.

c) $\cos 2x + \left(1+2\cos x\right)\left(\sin x - \cos x\right) = 0$ *(Dự bị B_2 – 2006)*.

d) $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$ *(Dự bị A_2 – 2005)*.

e) $2\sin x\cos 2x + \sin 2x\cos 2x = \sin 4x\cos x$ *(Dự bị B_1 – 2005)*.

Bài 4. (*) Giải các phương trình sau :

a) $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$ *(Khối D – 2006).*

b) $2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0$ *(Dự bị A_2 – 2006)*.

c) $\cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = 1$ *(Dự bị D_1 – 2006)*.

d) $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$ *(Dự bị D_2 – 2006)*.

e) $\sin 2x + \sin x - \dfrac{1}{2\sin x} - \dfrac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x$ *(Dự bị A_1 – 2007)*.

Bài 5. (*) Giải các phương trình sau :

a) $\sin\left(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\dfrac{3x}{2}$ *(Dự bị B_2 – 2007)*.

b) $\left(1-\tan x\right)\left(1+\sin 2x\right) = 1 + \tan x$ *(Dự bị D_2 – 2007)*.

c) $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$ *(Khối B – 2007).*

d) $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0$ *(Đại học NN1- KhốiA –1999).*

e) $\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} - \sin x\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2}$ *(Đại học Y Hà Nội –1999).*

f) $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$ *(Khối D – 2010).*

2. Phương pháp đặt ẩn phụ

2.1. Khái niệm:

- Đặt ẩn phụ t bằng một biểu thức nào đó có trong phương trình, biến phương trình cần giải thành một phương trình ẩn t dễ tìm ra cách giải hơn

- ***Chú ý:***

➢ Các phương trình có dạng:

$$a.\left(\sin u + \cos u\right) + b.\sin u.\cos u + c = 0 \qquad (1)$$

hoặc: $$a.\left(\sin u - \cos u\right) + b.\sin u.\cos u + c = 0 \qquad (2)$$

(*a; b; c* là các hằng số và $a^2+b^2+c^2 \neq 0$)

thì đặt $t = \sin u \pm \cos u = \sqrt{2}\sin\left(u \pm \dfrac{\pi}{4}\right), \left(|t| \le \sqrt{2}\right)$.

Tổng quát: phương trình đối xứng đối với sin*u* và cos*u* là phương trình có dạng $f\left(\sin u, \cos u\right) = 0$ trong đó:

$f\left(\sin u\ ;\ \cos u\right) = f\left(\cos u\ ;\ \sin u\right)$, có cách giải tương tự .

➢ Các phương trình có dạng:

$$a.\left(\tan^2 u + \cot^2 u\right) + b.\left(\tan u + \cot u\right) + c = 0 \quad (1)$$

hoặc : $$a.\left(\tan^2 u + \cot^2 u\right) + b.\left(\tan u - \cot u\right) + c = 0 \quad (2)$$

(*a ; b ;c* là các hằng số).

Thì đặt $t = \tan u + \cot u, \left(|t| \ge 2\right)$ hoặc $t = \tan u - \cot u, \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

* Những phương trình chỉ chứa các số hạng có dạng: $\tan^n u + \cot^n u$ và $\tan u \pm \cot u$ thì cũng có cách giải tương tự.

* Tổng quát: phương trình đối xứng đối với $\tan u$ và $\cot u$ là phương trình có dạng $f\left(\tan u, \cot u\right) = 0$, trong đó: $f\left(\tan u\ ;\ \cot u\right) = f\left(\cot u\ ;\ \tan u\right)$. cũng có cách giải như trên .

➢ Nếu gặp các phương trình chỉ chứa các hàm số lượng giác sin *u* và cos *u* với lũy thừa bậc chẵn, ta dùng công thức hạ bậc và đặt ẩn phụ $t = \cos 2u, \left(|t| \le 1\right)$.

➢ Các phương trình chỉ chứa $f\left(u\right) \pm \dfrac{1}{f\left(u\right)}$ và $f^n\left(u\right) \pm \dfrac{1}{f^n\left(u\right)}$ trong đó $f\left(u\right)$ là các hàm lượng giác của *u*, thì đặt:

$$t = f\left(u\right) \pm \frac{1}{f\left(u\right)} \text{ (nếu đặt } t = f\left(u\right) + \frac{1}{f\left(u\right)} \Rightarrow |t| \ge 2\text{)}.$$

➢ Các phương trình chỉ chứa các hàm số lượng giác sin *u* , cos *u* , tan*u* và cot*u* có thể đặt $t = \tan\dfrac{u}{2}$ và nên xét trường hợp $\cos\dfrac{u}{2} = 0$ có là nghiệm của phương trình cần giải hay không .

2.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Giải phương trình :

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\cos x + \sin x\right) - 2\sin x\cos x - 1 - \sqrt{2} = 0 \quad (1).$$

Lời giải

Đặt $t=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right), |t|\le\sqrt{2} \Rightarrow 2\sin x\cos x=t^2-1$

$$(1)\Rightarrow\left(1+\sqrt{2}\right)t-\left(t^2-1\right)-1-\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^2-\left(1+\sqrt{2}\right)t+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\sqrt{2}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z}).\\ x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình : $\sin 2x+4\left(\cos x-\sin x\right)=4 \quad (1)$.

Lời giải

Đặt $t=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right), |t|\le\sqrt{2} \Rightarrow \sin 2x=1-t^2$

$$(1)\Rightarrow 1-t^2+4t=4 \Leftrightarrow t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=3\ \ (\text{loại})\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\pi/4=\pi/4+k2\pi\\ x+\pi/4=-\pi/4+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3. Giải phương trình : $1+\sin^3x+\cos^3x=\frac{3}{2}\sin 2x \quad (1)$.

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Giao thông Vận tải, 1999) .

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow 1+\left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin x\cos x\right)=3\sin x\cos x \quad (2)$$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right), |t|\le\sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

$$(2)\Rightarrow 1+t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=3\left(\frac{t^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow t^3+3t^2-3t-5=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(t^2+2t-5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-1\pm\sqrt{6}\ \ (\text{loại})\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\frac{2}{\sin^2 x}+2\tan^2x+5\tan x+5\cot x+4=0 \quad (1)$.

Lời giải

Điều kiện : $\left\{\begin{array}{l}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x\ne 0 \Leftrightarrow 2x\ne k\pi \Leftrightarrow x\ne k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

$$(1)\Rightarrow 2\left(1+\cot^2x\right)+2\tan^2x+5\tan x+5\cot x+4=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\tan^2x+\cot^2x\right)+5\left(\tan x+\cot x\right)+6=0$$

Đặt : $t=\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow |t|\ge 2$, (do $|\sin 2x|\le 1$).

$$\Rightarrow \tan^2x+\cot^2x=\left(\tan x+\cot x\right)^2-2\tan x.\cot x=t^2-2.$$

Vậy ta được : $2\left(t^2-2\right)+5t+6=0 \Leftrightarrow 2t^2+5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Vì $|t|\ge 2 \Rightarrow t=-2$. Do đó ta có :

$$\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}=-2 \Leftrightarrow \sin 2x=-1$$

$$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right) \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\left(\tan x+\cot x\right)^2+\tan x-\cot x-4=0 \quad (1)$.

Lời giải

Điều kiện : $\left\{\begin{array}{l}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x\ne 0 \Leftrightarrow 2x\ne k\pi \Leftrightarrow x\ne k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

$$(1)\Rightarrow \tan^2x+\cot^2x+2+\tan x-\cot x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2x+\cot^2x+\tan x-\cot x-2=0$$

Đặt : $t=\tan x-\cot x=-2\cot 2x$.

$$\Rightarrow \tan^2x+\cot^2x=\left(\tan x-\cot x\right)^2+2\tan x.\cot x=t^2+2.$$

Vậy ta được: $t^2+2+t-2=0 \Leftrightarrow t^2+t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\\ t=0\end{array}\right.$

Do đó ta có:

$$\left[\begin{array}{l}\tan x-\cot x=-2\cot 2x=-1\\ \tan x-\cot x=-2\cot 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot 2x=\frac{1}{2}\\ \cot 2x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2}\right)+k\pi\\ 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2}\right)+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right., (k\in\mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2}\right)+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 6. Giải phương trình:

$$\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x+\cot x+\cot^2 x+\cot^3 x=6 \quad (1).$$

Lời giải

Điều kiện : $\left\{\begin{array}{l}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Đặt : $t=\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow |t|\geq 2$; (do $|\sin 2x|\leq 1$).

Khi đó : $\tan^2 x+\cot^2 x=(\tan x+\cot x)^2-2\tan x.\cot x=t^2-2$.

$\tan^3 x+\cot^3 x=(\tan x+\cot x)^3-3\tan x.\cot x(\tan x+\cot x)=t^3-3t$

Vậy ta được: $t^3-3t+t^2-2+t-6=0 \Leftrightarrow t^3+t^2-2t-8=0 \Leftrightarrow t=2$

Do đó ta có : $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}=2 \Leftrightarrow \sin 2x=1$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, (k\in\mathbb{Z})$ (thỏa điều kiện).

Ví dụ 7. Giải phương trình : $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{16}\cos^2 2x \quad (1)$

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Ngoại thương, 1995).

Lời giải

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{16}\cos^2 2x \Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^4=\frac{17}{16}\cos^2 2x$$

Đặt $t=\cos 2x, (|t|\leq 1) \Rightarrow \left(\frac{1-t}{2}\right)^4+\left(\frac{1+t}{2}\right)^4=\frac{17}{16}t^2$

$$\Leftrightarrow (1-t)^4+(1+t)^4=17t^2 \Leftrightarrow 2t^4-5t^2+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t^2=2 \text{ (loại)}\\ t^2=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1=0 \Leftrightarrow \cos 4x=0$$

$$\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}, (k\in\mathbb{Z}).$$

Ví dụ 8. Giải phương trình: $\cos x+\sqrt{3}\sin x=3-\frac{3}{\cos x+\sqrt{3}\sin x+1} \quad (1)$

(Trích ĐTTS Đại học DLPĐ - 1997).

Lời giải

Đặt $t=\cos x+\sqrt{3}\sin x$. Ta có : $|t|=\left|\cos x+\sqrt{3}\sin x\right|\leq\sqrt{1+3}=2$

Nên ta có , điều kiện : $\left[\begin{array}{l}-2\leq t\leq 2\\ t\neq -1\end{array}\right. \quad (*)$

$$(1)\Rightarrow t=3-\frac{3}{t+1} \Leftrightarrow t(t-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=2\end{array}\right. \quad \text{(thỏa (*))}$$

- $t=0 \Rightarrow \cos x+\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow \tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi, (k\in\mathbb{Z})$
- $t=2 \Rightarrow \cos x+\sqrt{3}\sin x=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 9. Giải phương trình: $\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}+\sin^4 x+\frac{1}{\sin^4 x}=\frac{27}{4} \quad (1)$.

Lời giải

Điều kiện : $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Đặt $t=\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow t\geq 2$. Khi đó : $\sin^4 x+\frac{1}{\sin^4 x}=t^2-2$

$$(1)\Rightarrow t+t^2-2=\frac{27}{4} \Leftrightarrow t^2+t-\frac{35}{4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-\frac{7}{2} \text{ (loại)}\\ t=\frac{5}{2}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\sin^4 x-5\sin^2 x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{1}{2} \\ \sin^2 x = 2 \ \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}, \left(l \in \mathbb{Z}\right).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x = \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}$, $\left(l \in \mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 10. Giải phương trình :

$$3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2 + 3\sqrt{2}\right)\cos x \quad (1).$$

(Trích ĐTTS vào Học viện kĩ thuật Quân sự, 2001).

Lời giải

Điều kiện : $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq l\pi, \left(l \in \mathbb{Z}\right)$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\sin^2 x \neq 0$, ta có :

$$3\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)^2 + 2\sqrt{2} = \left(2 + 3\sqrt{2}\right)\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Đặt $t = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, ta được : $3t^2 + 2\sqrt{2} = \left(2 + 3\sqrt{2}\right)t$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - \left(2 + 3\sqrt{2}\right)t + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = 2/3 \end{array}\right.$$

- $t = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \sqrt{2}\sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\sqrt{2} \ \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi, \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

- $t = \frac{2}{3} \Rightarrow 3\cos x = 2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -2 \ \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 11. Giải phương trình : $\sin 2x + \cos 2x + \tan x = 2 \quad (1)$

(Trích ĐTTS Đại học DLĐĐ - 2001).

Lời giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Đặt $t = \tan x$. $(1) \Rightarrow \frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + t = 2$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(t - 1\right)^3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + l\pi, \ \left(l \in \mathbb{Z}\right).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x = \frac{\pi}{4} + l\pi, \ \left(l \in \mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 12. Giải phương trình: $\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = 2 \quad (1)$.

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Sư phạm Quy Nhơn, 1998).

Lời giải

Đặt $t = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Điều kiện ; $0 \leq t \leq 2$.

$$(1) \Rightarrow t + \sqrt{t} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{t} = 2 - t \ \ \Leftrightarrow t = \left(2 - t\right)^2 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \ \text{(loại)} \end{array}\right. \ \Rightarrow 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., \ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

2.3. Bài tập áp dụng

Bài 6. Giải các phương trình :

a) $\sin 2x\left(\sin x + \cos x\right) = \sqrt{2}$. b) $\sin x\cos x + 2\sin x + 2\cos x = 2$.

c) $\cos^3 x + \sin^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$. d) $\cos^3 x + \sin^3 x = 2\sin 2x + \sin x + \cos x$.

e) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Bài 7. Giải các phương trình :

a) $5\left(\sin x + \cos x\right) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}\left(2 + \sin 2x\right)$.

b) $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x$.

c) $\cos^3 x + \sin^3 x = \sqrt{2}/2$.

d) $\left(2\sin x - 1\right)\left(2\sin 2x + 2\cos x - 1\right) = 3 - 4\cos^2 x$.

Bài 8. (*) Giải các phương trình :

a) $\cos^2 x + \sin^3 x + \cos x = 0$. b) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

c) $\tan^2 x=\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$.   d) $3\tan^3 x-\tan x+\dfrac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x}-8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)=0$

(ĐH Kiến trúc HN – 1999)

Bài 9. (*) Giải các phương trình :

a) $\cos^4 x+\sin^4 x-2\left(1-\sin^2 x.\cos^2 x\right).\sin x.\cos x-\sin x-\cos x=0$.

b) $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin x$.   *(ĐH Mỏ Địa Chất – 1999)* .

c) $\cos^3 x+\sin^3 x=2\sin 2x+\sin x+\cos x$.   *(Đại học CSND – 2000).*

d) $\sin 2x-2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)-5=0$ *(Dự bị D_2 – 2004)* .

e) $\cos^3 x-\sin^3 x=-1$ *(ĐHQG TP.HCM – 2000).*

Bài 10. Giải các phương trình :

a) $\tan^2 x+\cot^2 x+\dfrac{1}{\sin 2x}=3$;

c) $\tan^3 x-\cot^3 x+2\left(\tan x-\cot x\right)-6=0$

b) $3\tan^2 x+4\tan x+4\cot x+3\cot^2 x+2=0$.

Bài 11. (*) Giải các phương trình sau :

a) $\cos x+\tan\dfrac{x}{2}=1$.   b) $3\sin 2x+\cos 2x-4\cot x+1=0$.

c) $\sin^{10} x+\cos^{10} x=\dfrac{29}{16}\cos^4 2x$.   d) $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Bài 12. (*) Giải các phương trình sau :

a) $\sin^4 x+\left(1-\sin x\right)^4=17$.

b) $\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}$.

c) $2\left(\cos^2 x+\dfrac{4}{\cos^2 x}\right)+9\left(\dfrac{2}{\cos x}-\cos x\right)-1=0$.

d) $\sin^2 x-\sin x+\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin x}=0$.

3. Phương pháp đánh giá hai vế

3.1. Phương pháp: Các phương trình lượng giác không thể giải theo các cách thông thường, thì cần áp dụng một trong các phương pháp sau để đưa về một hệ các phương trình một ẩn:

- Phương pháp tổng các biểu thức không âm:

$$\begin{cases}A+B=0\\A\ge 0\\B\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$$

- Phương pháp đối lập: $\begin{cases}A=B\\A\ge M\\B\le M\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=M\\B=M\end{cases}$

- Phương pháp phản chứng: $\begin{cases}A+B=M+N\\A\le M\\B\le N\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=M\\B=N\end{cases}$

- Dùng các tính chất của hàm số (đoán nghiệm và chứng minh nghiệm đó là duy nhất).

3.2. Chú ý :

Để tìm nghiệm của hệ ta tìm nghiệm chung của các phương trình trong hệ , có thể bằng nhiều cách khác nhau , nhưng dễ thấy nhất là biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi tìm các điểm chung .

3.3. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Giải phương trình :

$$4\cos^3 x+3\tan^2 x-4\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}\tan x+4=0\quad(1).$$

Lời giải

Điều kiện : $\cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

$$(1)\Leftrightarrow\left(4\cos^3 x-4\sqrt{3}\cos x+3\right)+\left(3\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}.\tan x+1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos x-\sqrt{3}=0\\\sqrt{3}.\tan x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\tan x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{6}+m.2\pi\ (1)\\x=-\dfrac{\pi}{6}+n.\pi\quad(2)\end{cases},(m,n\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp nghiệm (1) và (2) ta thấy nghiệm chung là : $x=-\dfrac{\pi}{6}+l2\pi,\left(l\in\mathbb{Z}\right)$.

Dễ thấy họ nghiệm này thỏa mãn điều kiện, nên nó cũng chính là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\left(\cos 2x-\cos 4x\right)^2=6+2\sin 3x\quad(1)$.

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow 4\sin^2 3x\sin^2 x=6+2\sin 3x$$

Ta có : $\begin{cases}4\sin^2 3x\sin^2 x\le 4\\6+2\sin 3x\ge 4\end{cases}\Rightarrow 4\sin^2 3x\sin^2 x=6+2\sin 3x=4$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 3x\sin^2 x=1\\\sin 3x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x=1\\\sin 3x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\pm 1\\3\sin x-4\sin^3 x=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\pm 1\\\left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{2}\\\sin x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Ví dụ 3. Giải phương trình:

$$\sin 3x(\cos x-2\sin 3x)+\cos 3x(1+\sin x-2\cos 3x)=0 \quad (1)$$

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội, 1997)

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow(\sin 3x\cos x+\sin x\cos 3x)+\cos 3x-2\left(\sin^2 3x+\cos^2 3x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x+\cos 3x=2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 4x\le 1\\ \cos 3x\le 1\\ \sin 4x+\cos 3x=1+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 4x=1\\ \cos 3x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ 3x=l2\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pi/8+k\pi/2 & (1)\\ x=l2\pi/3 & (2)\end{cases},\ (k,l\in\mathbb{Z}).$$

Khi biểu diễn các họ nghiệm (1) và (2) trên đường tròn lượng giác, ta th không có điểm nghiệm nào chung . Tức là phương trình đã cho vô nghiệm .

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\cos x=1+x \quad (1)$

Lời giải

a) Ta thấy $x=0$ là nghiệm của (1) .

Xét $f(x)=1+x-\cos x\Rightarrow f'(x)=1+\sin x\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Nên $f(x)$ là hàm đồng biến . Do đó

+ Khi $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow 1+x-\cos x>0\Rightarrow \cos x<1+x$

Vậy $\forall x>0$ không phải là nghiệm của (1) .

+ Khi $x<0\Rightarrow f(x)<f(0)\Rightarrow 1+x-\cos x<0\Rightarrow \cos x>1+x$

Vậy $\forall x<0$ không phải là nghiệm của (1) .

Tức là , phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

3.4. Bài tập áp dụng

Bài 13. (*) Giải các phương trình sau :

a) $8\cos 4x\cos^2 2x+\sqrt{1-\cos 3x}+1=0$.

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Sư phạm Vinh, 2000)

b) $\sin^2 x+\dfrac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left(\cos 3x\sin^3 x+\sin 3x\cos^3 x\right)=\sin x\sin^2 3x$.

(Trích ĐTTS vào Trường Đại học Y khoa Thái Bình, 2000) .

c) $\cos 2x-\cos 6x+4\left(3\sin x-4\sin^3 x+1\right)=0$.

d) $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2(x+y)=\dfrac{9}{4}$.

Bài 14. (*) Giải các phương trình sau :

a) $\cos 2x+\cos\dfrac{3x}{4}-2=0$. *(Đại học Thương mại – 1997)* .

b) $\sin 3x+\cos 5x=1$.

c) $\sin^8 x+\cos^{11} x=1$.

d) $\sin 3x(\cos x-2\sin 3x)+\cos 3x(1+\sin x-2\cos 3x)=0$.

Bài 15. (*) Giải các phương trình sau:

a) $(\cos 4x-\cos 2x)^2=5+\sin 3x$.

b) $\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x}=2\left(1+\sin^2 2x\right)$.

(Trích ĐTTS vào Học viện Ngân hàng TPHCM, 2001).

c) $\cos 2x+8=7.\sin x$. d) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}(2-\sin 3x)$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y=\dfrac{2\sin x+\cos x}{\cos\left(4x+\dfrac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$. b) $y=\sqrt{\dfrac{2+\cos x}{\sin 2x+1}}$

c) $y=\dfrac{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2}$. d) $y=\dfrac{\cot 2x}{\sin^2 x-2\sin x.\cos x-3\cos^2 x}$.

Bài 2. Cho hàm số: $y=\sin(\pi x)$

a) Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn của hàm số.

b) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số trên đoạn $[-1;1]$.

Bài 3. Tìm các khoảng đồng biến , nghich biến và miền giá trị của các hàm số:.

a) $y=\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

b) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{4\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

c) $y=\tan 3x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Bài 4. (*) Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y=|\sin 2x-\cos 2x|$. b) $y=\tan|x|-\cot|x|$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau : .

a) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{4}\right]$ .b) $y=\cos(\pi x)$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{2}\right]$.

c) $y=\sqrt{4-3\cos^2 3x}+1$. d) $y=4\sin^2 x+3\cos 2x-5$.

e) $y=(\sin 2x-2\cos 2x)(2\sin 2x+\cos 2x)+4$.

f) $y=2\sin^2 3x+\sin 6x+\cos^2 3x$. g) $y=\dfrac{4\sin x+\cos x-3}{\sin x-\cos x+2}$.

h) $y=\dfrac{\sin^2 x+\sin 2x+3\cos^2 x}{3\sin 2x-\cos 2x+4}$.

Bài 6. Giải các phương trình sau :

a) $\cot^2 x + 2\tan x - 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. b) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{5}{4}$.

c) $\dfrac{3}{\cos x} = 3 + 2\tan^2 x$. d) $6\sin^2 3x + \cos 12x = 4$.

Bài 7. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}$.

b) $\sqrt{3}\sin 2x + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) = 1$.

c) $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$.

d) $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}$.

e) $\sin x + \cos x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{10}{3}$.

Bài 8. Giải các phương trình sau :

a) $2\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x.\cos x + (1 - \sqrt{3})\cos^2 x = 1$.

b) $3\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 0$.

c) $3\sin^2\dfrac{x}{2}.\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{x}{2}\right) + 3\sin^2\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2} = \sin\dfrac{x}{2}.\cos^2\dfrac{x}{2} + \sin^2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right).\cos\dfrac{x}{2}$.

d) $\sqrt{3}\sin x.\cos x - \sin^2 x = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

Bài 9. Giải phương trình : a) $\sin 2x.\sin 6x = \sin 7x.\sin x$.
b) $\sin 4x.\sin 5x + \sin 4x.\sin 3x - \sin 2x.\sin x = 0$.

Bài 10. Giải các phương trình: a) $\cos x.\cos 5x = \cos 2x.\cos 4x$.
b) $\cos x.\cos 3x - \sin 2x.\sin 6x - \sin 4x.\sin 6x = 0$.
c) $\sin 4x + \sin 2x = \sin 6x$.
d) $\cos 22x + 3\cos 18x + 3\cos 14x + \cos 10x = 0$.

Bài 11. Giải phương trình: a) $\sin x + \sin 3x + 2\sin 5x = 0$.
b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Bài 12. Giải phương trình:

a) $\cos^2 3x + \cos^2 4x = \cos^2 5x + \cos^2 6x$. b) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos 8x$.

Bài 13. Giải phương trình :

a) $\tan\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right) + \cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$. b) $\tan\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right).\tan\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$.

Bài 14. Giải các phương trình:

a) $\sin^2 x = \sin^2 3x$ b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{3}{2}$

c) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ d) $\cos^4 x + 2\sin^6 x = \cos 2x$

e) $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 2x + \dfrac{1}{2\sin^2 2x} - 1 = 0$.

Bài 15. Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x.\tan x + \cos^2 x.\cot x - \sin 2x = 1 + \tan x + \cot x$.

b) $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$.

c) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sqrt{2}(\cos x + \cos 2x + \cos 3x)$.

d) $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin 2x.\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

Bài 16. (*) Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right).\cot 3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{2}\cos 5x = 0$.

b) $(2\sin x + 1).(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x = 3$.

c) $\sin^3 x + \cos^3 x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $1 + \cot 2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$.

e) $\sin\left(\dfrac{9\pi}{2} + 4x\right) - 3\cos\left(2x - \dfrac{15\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin 2x$, $(x \in [0;\pi])$.

Bài 17. (*) Giải các phương trình sau:

a) $\tan x + \dfrac{1}{\sin x} = |\cot x|$.

b) $\dfrac{\tan^2 x}{|\tan x - 1|} = \left|\dfrac{\tan x}{\tan x - 1}\right| + |\tan x|$, $\left(x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. *(ĐH Thủy sản – 1998)*

c) $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \cos 2x - \sin 2x$, $(x \in (0;2\pi))$ *(ĐH Kiến trúc – 1996)*

d) $\dfrac{\sqrt{1 + \cos 2x} + \sqrt{1 - \cos 2x}}{\cos 2x} = 4\sin 2x$, $(x \in (0;\pi))$.

e) $\dfrac{\cos\dfrac{4x}{3} - \cos^2 x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}} = 0$. *(ĐH Y Hà Nội– 1998).*

Bài 18. Cho phương trình: $\cos x\sin x + |\cos x + \sin x| = m$ (1)

a) Giải (1) khi $m = 1$. b) Tìm m để (1) có nghiệm .

Bài 19. Cho phương trình: $\cos 4x - (2m + 1)\cos 2x + m + 1 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x \in \left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Bài 20. Biết số đo các góc của một tam giác ABC là các nghiệm của phương trình:

$\tan x - \tan\dfrac{x}{2} - \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 0$. Chứng minh tam giác ABC đều .

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Tập xác định của các hàm số :

a) $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. b) $D=\mathbb{R}$ c) $D=\mathbb{R}$ d) $D=\mathbb{R}$.

e) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. f) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

g) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{3}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. h) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

i) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 2. Tập xác định của các hàm số:

a) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) $D=\mathbb{R}$; d) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{l\pi \mid l\in\mathbb{Z}\}\right\}$.

e) $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$; f) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{l\pi \mid l\in\mathbb{Z}\}\right\}$

Bài 3. a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$

Giả sử : $T\neq 0$ thỏa : $f(x+T)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \sin\left[a(x+T)+b\right]=\sin(ax+b),\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin[ax+aT+b]=\sin(ax+b),\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow aT=k2\pi \Rightarrow T=\frac{k2\pi}{a},(k\in\mathbb{Z})$$

Ngược lại , dễ thấy :

$$\sin\left[a\left(x+\frac{k2\pi}{a}\right)+b\right]=\sin(ax+b+k2\pi)=\sin(ax+b),\forall x\in\mathbb{R}$$

Vậy, chỉ $\forall T=\frac{k2\pi}{a},k\in\mathbb{Z}$ thì ta mới có: $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\Rightarrow x\pm T\in\mathbb{R}\\ f(x+T)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

Tức là $y=f(x)=\sin(ax+b)$ là hàm số tuần hoàn , mặt khác trong các số $T=\frac{k2\pi}{a},(k\in\mathbb{Z})$, thì số dương nhỏ nhất là $T={}^{2\pi}\!/_{|a|}$. Do đó hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn có chu kì $T={}^{2\pi}\!/_{|a|}$. (Các câu còn lại chứng minh tương tự).

Bài 4. Chu kì của các hàm số :

a) $T=\pi$ b) $T=6\pi$ c) $T=\pi$ d) $T=4\pi$

e) $T=\pi$ f) $T=7\pi$ g) $T=\pi$ h) $T=\frac{\pi}{4}$ i) $T=\frac{\pi}{3}$.

Bài 5. Ta có: $y=\sin^2 2x+\cos^2 2x=1,\forall x\in\mathbb{R}$, tức là hàm số đã cho là hàm số hằng, suy ra với mọi số T ta đều có:

$$y=\sin^2 2(x+T)+\cos^2 2(x+T)=1=\sin^2 2x+\cos^2 x\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn . Nhưng trong các số thực T dương không có số nhỏ nhất , nên hàm số trên tuần hoàn không có chu kì.

Bài 6. Tính chẵn, lẻ, tuần hoàn:

a) $y=\sin x.\cos 3x=\frac{1}{2}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x$. Nên nó là hàm số lẻ , tuần hoàn và có chu kỳ $T=\frac{\pi}{2}$.

b) Là hàm số lẻ , tuần hoàn và có chu kỳ $T=\pi$.

c) $y=\sin^2 2x+1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x$. Nên nó là hàm số chẵn, tuần hoàn và có chu kỳ $T=\frac{\pi}{2}$.

d) $y=\sin^2 2x-\cos^2 2x=-\cos 4x$. Nên nó là hàm số chẵn , tuần hoàn và có chu kỳ $T=\frac{\pi}{2}$.

e) $y=\cot^2 2x=\frac{1}{\sin^2 2x}-1=\frac{2}{1-\cos 4x}-1$. Nên nó là hàm số chẵn, tuần hoàn và có chu kỳ $T=\frac{\pi}{2}$.

f) $y=\sin^6 x-\cos^6 x=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right).\left(\sin^4 x+\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x\right)$

$$=-\cos 2x\left(1-\sin^2 x.\cos^2 x\right)=-\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 2x.\sin^2 2x$$

$$=-\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 2x.(1-\cos 4x)=-\frac{7}{8}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 2x.\cos 4x$$

$$=-\frac{7}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}(\cos 6x+\cos 2x)=-\frac{15}{16}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 6x.$$

Nên nó là hàm số chẵn , tuần hoàn và có chu kỳ $T=\frac{\pi}{3}$.

Bài 7. Tính chẵn – lẻ của hàm số:

a) Hàm số không chẵn, cũng không lẻ.

b) Hàm số không chẵn, cũng không lẻ. c) Là hàm số lẻ .

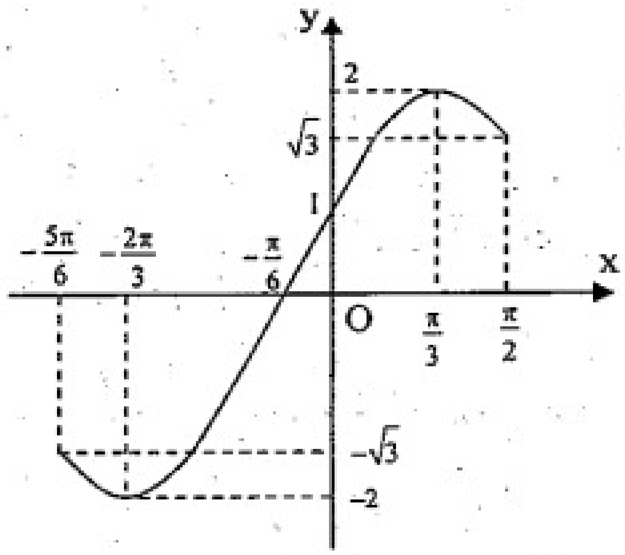
d) Là hàm số chẵn . e) Là hàm số lẻ . f) Là hàm số chẵn .

g) Là hàm số lẻ . h) Là hàm số lẻ . i) Hàm số không chẵn, cũng không lẻ .

Bài 8. Bảng biến thiên:

x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x+\frac{\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
y	$-\sqrt{3}$	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ 1	$\nearrow$ 2	$\searrow$ $\sqrt{3}$

Đồ thị :



Bài 9. a) Hai hàm số cùng đồng biến trên các khoảng : $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\,k\pi\right),(k\in\mathbb{Z})$

b) Hai hàm số cùng nghịch biến trên các khoảng : $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),(k\in\mathbb{Z})$.

Bài 10. Phép đối xứng qua điểm $I\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ có công thức đổi trục : $\begin{cases}x'=\pi-x\\ y'=-y\end{cases}$

a) Hàm số $y=\sin x$ biến thành $-y'=\sin(\pi-x')\Leftrightarrow y'=-\sin x'$.

b) $y=\sin 2x$ biến thành $-y'=\sin(2\pi-2x')\Leftrightarrow y'=\sin 2x'$.

c) $y=\cos 2x$ biến thành $-y'=\cos(2\pi-2x')\Leftrightarrow y'=-\cos 2x'$.

d) $y=\cot x$ biến thành $-y'=\cot(\pi-x')\Leftrightarrow y'=\cot x'$.

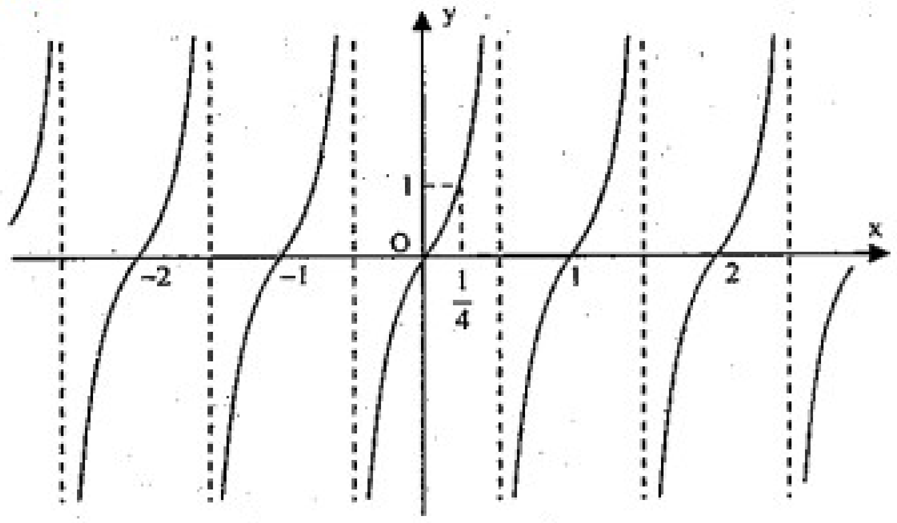
Bài 11. Hàm số : $y=\tan(\pi x)$.

+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k+\frac{1}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

+ Chiều biến thiên : Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của n

+ Đây là hàm số lẻ và tuần hoàn có chu kì $T=1$.

+ Đồ thị:



Bài 12. Từ đồ thị của hàm số $y=\cos x$ suy ra đồ thị của :

a) $y=-\cos x$ bằng cách lấy đối xứng qua trục Ox.

b) $y=|\cos x|$ bằng cách giữ nguyên phần phía trên trục Ox và lấy đối xứng phần phía dưới Ox qua trục Ox.

c) Vì $y=\cos|x|=\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$, suy ra đồ thị của hàm số $y=\cos|x|$ trùng với đồ thị của hàm số $y=\cos x$.

Bài 13. Từ đồ thị của hàm số $y=\sin x$ suy ra đồ thị của:

a) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ bằng cách co theo phương trục hoành về trục tung theo hệ số $k=\frac{1}{2}$ ta được đồ thị hàm số $y=\sin 2x$, sau đó tịnh tiến theo véc tơ $\overline{u}=\left(-\frac{\pi}{3};0\right)$ ta được đồ thị hàm số $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

b) $y=2\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$ bằng cách tịnh tiến theo véc tơ $\overline{u}=\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ ta được đồ thị hàm số $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; Giữ nguyên phần phía trên trục hoành, lấy đối xứng qua *Ox* phần bên dưới trục hoành ta được đồ thị của $y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$; Giãn theo phương trục tung với hệ số $k=2$ ta được đồ thị hàm số cần vẽ.

c) $y=\sin\left|\frac{x}{2}\right|-1$ bằng cách giãn theo phương trục hoành với hệ số $k=2$ ta được đồ thị hàm số $y=\sin x/2$; bỏ phần bên trái trục Ox, lấy đối xứng phần còn lại qua trục tung ta được đồ thị của hàm số $y=\sin\left|\frac{x}{2}\right|$; tịnh tiến theo véc tơ $\overline{u}=(0;-1)$ ta được đồ thị của hàm số $y=\sin\left|\frac{x}{2}\right|-1$.

Bài 14.

a) Lập bảng biến thiên của $y=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, trên đoạn $\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ .Rồi dựa vào bảng biến thiên suy ra kết quả .

b) Lập bảng biến thiên của $y=\cos\pi x$, trên đoạn $\left[\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$ .Rồi dựa vào bảng biến thiên suy ra kết quả .

c) $y=3\sin x+4\cos x=5\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right)=5\sin(x+\alpha)\ ;\alpha=\arcsin\frac{4}{5}$

Do đó : $-5\le y=5\sin(x+\alpha)\le 5,\forall x\in\mathbb{R}$

Vậy, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=5$ khi $\sin(x+\alpha)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-\alpha+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-5$ khi $\sin(x+\alpha)=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}-\alpha+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

d) $y=\sin^4x+\cos^4x-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4x-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cos4x\Rightarrow-\frac{1}{4}\le y\le\frac{1}{4},\forall x\in\mathbb{R}$

Vậy, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\frac{1}{4}$ khi $\cos4x=1\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-\frac{1}{4}$ khi $\cos4x=-1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};(k\in\mathbb{Z})$

e) $y=5+\frac{1}{2}\sin2x.\cos2x=5+\frac{1}{4}\sin4x\Rightarrow\frac{19}{4}\le y\le\frac{21}{4},\forall x\in\mathbb{R}$

Vậy, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\frac{21}{4}$ khi $\sin4x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\frac{19}{4}$ khi $\sin4x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

f) $y=\sqrt{1-\sin(x^2)}-1$

Vì $\sqrt{1-\sin(x^2)}\ge0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow y\ge-1,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-1$ khi $\sin(x^2)=1\Leftrightarrow x^2=\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z}^+)$

Vì $\sin(x^2)\ge-1\Rightarrow\sqrt{1-\sin(x^2)}\le\sqrt{2},\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow y\le\sqrt{2}-1,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\sqrt{2}-1$ khi $\sin(x^2)=-1\Leftrightarrow x^2=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z}^+)$.

Bài 15. Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là giao điểm của $(\Delta):y=\frac{x}{2}$ và đồ thị của $y=\sin x$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_0=\sin x_0\\2y_0=x_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|y_0|=|\sin x_0|\le1\\|x_0|=|2y_0|\le2\end{cases}\Rightarrow x_0^2+y_0^2\le4+1=5$$

Mà $OM_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\Rightarrow OM_0\le\sqrt{5}$. Nếu $M_0\in(\Delta)$ thì $OM_0=\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow M_0(2;1)$ hoặc $M_0'(-2;-1)$ mà $M_0,M_0'\notin y=\sin x\Rightarrow$ (đpcm) .

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC DẠNG CƠ BẢN

Bài 1. a) $\sin\left(5x+\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x+\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\5x+\frac{2\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{7\pi}{150}+k\frac{2\pi}{5}\\x=\frac{13\pi}{150}+k\frac{2\pi}{5}\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{5\pi}{24}+k\pi\\x=-\frac{13\pi}{24}+k\pi\end{array}\right.$

c) $\cot(45^0-x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow45^0-x=-60^0+k180^0\Leftrightarrow x=105^0-k180^0$.

d) $\tan(x+3)=\cot\left(2+\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\tan(x+3)=\tan(-2)\Leftrightarrow x=-5+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Bài 2. a) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow2x-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

vì $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{8\pi}{3}\right)\Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}$, $x=\frac{3\pi}{2}$.

b) $\tan(x+15^0)=\cot45^0=\tan45^0\Leftrightarrow x=30^0+k180^0,(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in(-105^0;512^0)\Rightarrow x=30^0$, $x=210^0$, $x=390^0$.

c) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow2\sin\frac{3x}{2}.\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{3x}{2}=0\\\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\frac{2\pi}{3}\\x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in\left(-\pi;\frac{4\pi}{3}\right)\Rightarrow x=-\frac{2\pi}{3}$, $x=0$, $x=\frac{2\pi}{3}$.

Bài 3. a) $\sin^2 2x+\cos^2 3x=1\Leftrightarrow\dfrac{1-\cos 4x}{2}+\dfrac{1+\cos 6x}{2}=1\Leftrightarrow\cos 6x=\cos 4x$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x=-4x+k2\pi\\6x=4x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{5}\\x=k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{5},\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\sin^2\left(5x+\dfrac{2\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\dfrac{x}{4}+\pi\right)\Leftrightarrow\dfrac{1-\cos\left(10x+\dfrac{4\pi}{5}\right)}{2}=\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{x}{2}+2\pi\right)}{2}$

$$\Leftrightarrow-\cos\left(10x+\dfrac{4\pi}{5}\right)=\cos\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow\cos\left(\dfrac{\pi}{5}-10x\right)=\cos\dfrac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-10x+\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{x}{2}+k2\pi\\-10x+\dfrac{\pi}{5}=-\dfrac{x}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{105}-k\dfrac{4\pi}{21}\\x=\dfrac{2\pi}{95}-k\dfrac{4\pi}{19}\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

c) $\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{5}{8}\Leftrightarrow\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos 4x=\dfrac{5}{8}\quad\Leftrightarrow\cos 4x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4},(k\in\mathbb{Z})$

Bài 4. a) $\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow 2x-\dfrac{\pi}{3}=\pm\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\x=\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{k2\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\sin\left(x+24^0\right)+\cos\left(x+144^0\right)=\sin 15^0$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x+24^0\right)+\sin\left(-x-54^0\right)=\sin 15^0\Leftrightarrow\sin\left(x+24^0\right)-\sin\left(x+54^0\right)=\sin 15$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(x+39^0\right)\sin\left(-15^0\right)=\sin 15^0\Leftrightarrow\cos\left(x+39^0\right)=-\dfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x+39^0=\pm 120^0+k360^0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=81^0+k360^0\\x=-159^0+k360^0\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

c) $\sqrt{2}\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)=\sin x+\cos x$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\cos 2x=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x=\pm\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+k2\pi\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

Bài 5. a) $\cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\cos^3 2x=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$

$$\Leftrightarrow\cos 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{8}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\cos 10x+2\cos^2 4x+6\cos 3x\cos x=\cos x+8\cos x\cos^3 3x$

$$\Leftrightarrow\cos 10x+2\cos^2 4x=\cos x+2\cos x\left(4\cos^3 3x-3\cos 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow\cos 10x+1+\cos 8x=\cos x+2\cos x\cos 9x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 9x\cos x+1=\cos x+2\cos x\cos 9x\Leftrightarrow\cos x=1\ \Leftrightarrow x=k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

c) $16\sin x.\cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x=-1$

$$\Leftrightarrow 8\sin 2x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x=-1\Leftrightarrow 4\sin 4x.\cos 4x.\cos 8x=-1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 8x.\cos 8x=-1\Leftrightarrow\sin 16x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{32}+k\dfrac{\pi}{8}\quad,(k\in\mathbb{Z}).$$

d) $\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{8}$

$$\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x).\cos 3x-\dfrac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x).\sin 3x=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{8}$$

$$\Leftrightarrow\cos^2 3x+\sin^2 3x+3\left(\cos 3x.\cos x-\sin 3x.\sin x\right)=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+3\cos 4x=1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos 4x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 4x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{16}+k\dfrac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z}).$$

e) $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$

$$\Leftrightarrow\cos 2x.\cos x+2\cos 2x+2\sin x.\cos^2 x-\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x(\cos x+2)+\sin x\left(2\cos^2 x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x(\cos x+\sin x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\\sin x+\cos x=-2\ \ (VN)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm : $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 6.

a) $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow 3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\cos 4x-4\cos 2x=5$

$$\Leftrightarrow 4(1+\cos 2x)+1-\cos 4x=0 \Leftrightarrow 8\cos^2 x+2\sin^2 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^2 x+8\sin^2 x.\cos^2 x=0 \Leftrightarrow 8\cos^2 x\left(1+\sin^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$$

c) Do $x\in(0;\pi)$, nên $\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\cos 2x+\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x.\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x}}=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=\pm 2x+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$$

Vì $x\in(0;\pi)\Rightarrow 0<\dfrac{\pi}{16}+k\dfrac{\pi}{2}<\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{8}<k<\dfrac{15}{8},\ (k\in\mathbb{Z})\ \Rightarrow k=0;k=1$

Vậy , phương trình đã cho có hai nghiệm $x\in(0;\pi)$ là: $x=\dfrac{\pi}{16}, x=\dfrac{9\pi}{16}$.

Bài 7. a) $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right] \Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{\pi}{4}=x+\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 3x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}-x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $8\cos^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$ (*) . Đặt $u=x+\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow x=u-\dfrac{\pi}{3}$.

$\Rightarrow$ (*) trở thành : $8\cos^3 u=\cos(3u-\pi)=-\cos 3u$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 u=3\cos u-4\cos^3 u \Leftrightarrow 3\cos u\left(4\cos^2 u-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos u=0 \\ 2(1+\cos 2u)-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos u=0 \\ \cos 2u=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ u=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$$

Vậy ta được : $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi-\frac{\pi}{3} \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi-\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=k\pi \\ x=-\frac{2\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$.

Cách khác : $(*) \Leftrightarrow 8\cos^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos(3x+\pi)$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-4\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\left[4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1\right]=0 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\left[1+2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \\ \cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$, suy ra kết quả như trên.

c) $\sin^2 4x-\cos^2 6x=\sin(10,5\pi+10x)$, $\left(x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\cos 8x)-\frac{1}{2}(1+\cos 12x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+10x+10\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow -(\cos 12x+\cos 8x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+10x\right) \Leftrightarrow -2\cos 10x.\cos 2x=2\cos 10x$$

$$\Leftrightarrow \cos 10x(\cos 2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 10x=0 \\ \cos 2x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{10} \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{20}, x=\dfrac{3\pi}{20}, x=\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{7\pi}{20}, x=\dfrac{9\pi}{20}$.

Bài 8. a) $\dfrac{\cot^2 2x-1}{2\cot 2x}-\cos 8x.\cot 4x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1) .

Điều kiện : $\begin{cases} \sin 4x\neq 0 \\ \cos 2x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x\neq 0$

$$\Leftrightarrow \cot 4x-\cos 8x.\cot 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot 4x(1-\cos 8x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 4x}{\sin 4x}.2\sin^2 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Leftrightarrow \sin 8x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (thỏa điều kiện)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 8x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\dfrac{\sqrt{2}\cos x - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\sin x} = 1$ (2)

Điều kiện : $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sqrt{2}\sin x} = 1$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2}\cos x} = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ (thỏa điều kiện)

c) $\dfrac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} = 9$ (3)

Điều kiện : $\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4 \neq 0$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x.\cos^2 x - 4(1 - \sin^2 x) \neq 0 \Leftrightarrow -4\cos^2 x(1 - \sin^2 x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -4\cos^4 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{-4\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{-4\cos^4 x} = 9$$

$$\Leftrightarrow \tan^4 x = 9 \Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện , suy ra nghiệm của (3) : $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 9. a) $\tan^2 x + \cot^2 x + \cot^2 2x = \dfrac{11}{3}$ (1)

Điều kiện : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

$$(1) \Leftrightarrow (\tan x + \cot x)^2 - 2\tan x \cot x + \cot^2 2x = \frac{11}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\right)^2 - 2 + \frac{1}{\sin^2 2x} - 1 = \frac{11}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sin 2x}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 2x} = \frac{20}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pm\frac{2\pi}{3} + l2\pi, (l \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + l\frac{\pi}{2}, (l \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + l\dfrac{\pi}{2}, (l \in \mathbb{Z})$.

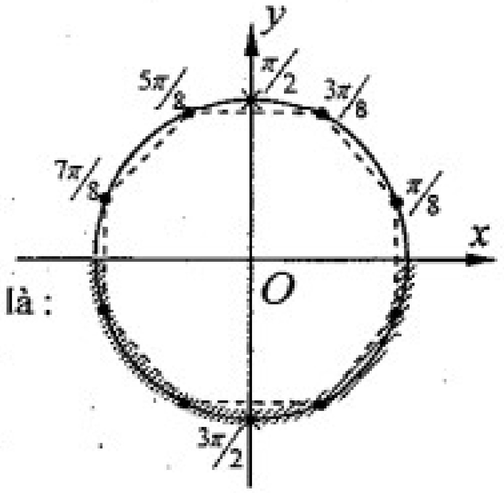
b) $2\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right).\cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left[\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{12}\right) - \sin\dfrac{\pi}{12}\right] = 1$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} = \sin\frac{5\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{12} = \pi - \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$$

c) $\sqrt{\dfrac{1}{8\cos^2 x}} = \sin x$. Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{8\cos^2 x} = \sin^2 x \Leftrightarrow 8\sin^2 x.\cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện , ta có nghiệm của phương trình là :

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k2\pi, \ x = \dfrac{3\pi}{8} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{8} + k2\pi, \ x = \dfrac{7\pi}{8} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 10. a) Đáp *số:* $x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$.

b) *Đáp số:* $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

c) *Đáp số:* $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

d) $\tan^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$ (3)

Điều kiện : $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\end{cases}$

$$(3)\Leftrightarrow\left(\frac{\tan x-1}{1+\tan x}\right)^3=\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow(\tan x-1)^3=(\tan x-1)(1+\tan x)^3$$

$$\Leftrightarrow(\tan x-1)\left[(\tan x-1)^2-(1+\tan x)^3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(\tan x-1)\left(1-2\tan x+\tan^2 x-\tan^3 x-3\tan x-3\tan^2 x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow-(\tan x-1)\tan x\left(\tan^2 x+2\tan x+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Bài 11. a) *Đáp số :* $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) *Đáp số :* $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ hoặc $x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

c) *Đáp số :* $x=\dfrac{\pi}{16}+k\dfrac{\pi}{8},(k\in\mathbb{Z})$.

Bài 12. a) *Đáp số :* $x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) *Đáp số :* $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{4},\ (k\in\mathbb{Z})$.

c) *Đáp số :* $x=\pi+k2\pi$ hoặc $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

d) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2\ (*)$. Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq -1\end{cases}$.

Ta có: $(*)\Rightarrow\cot x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2\Leftrightarrow\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2$

$$\Leftrightarrow\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x=2\sin x(1+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow\cos x+1=2\sin x(\cos x+1)\Leftrightarrow(\cos x+1)(2\sin x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ 2\sin x=1\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $\Rightarrow(*)\Leftrightarrow\sin x=\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \text{ hoặc } x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

e) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-3\tan^2 x=\dfrac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}$

Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

Ta có: $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-3\tan^2 x=\dfrac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\cot x-3\tan^2 x=\dfrac{-2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\tan x}-3\tan^2 x=-2\tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow\tan^3 x=1\ \Leftrightarrow\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

f) Điều kiện: $\cos 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\ ,k\in\mathbb{Z}$

$$\left(2\sin^2 x-1\right)\tan^2 2x+3\left(2\cos^2 x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow-\cos 2x.\tan^2 2x+3\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow-\cos 2x\left(\tan^2 2x-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \tan^2 2x=3.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\tan^2 2x=3\quad(\text{do }\cos 2x\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow\tan 2x=\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

ài 1. a) *Đáp số :* $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\vee x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) $4\cos^5 x.\sin x-4\sin^5 x.\cos x=\sin^2 4x-2$

$$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos x\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)=\sin^2 4x-2$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x=\sin^2 4x-2\Leftrightarrow\sin^2 4x-\sin 4x-2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 4x=-1\\ \sin 4x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\sin 4x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z}).$$

c) $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 4\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x\left(2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin x = \sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right. ,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) $\dfrac{1}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x = 5$. Điều kiện : $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 1 + \cot^2 x + 3\tan^2 x = 5 \Leftrightarrow 3\tan^4 x - 4\tan^2 x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan^2 x = 1\\ \tan^2 x = \dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = \pm 1\\ \tan x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right. ,\ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 2.

a) *Đáp số :* $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) *Đáp số :* $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

c) *Đáp số :* $\left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

d) *Đáp số :* $x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

e) *Đáp số :* $x \in \left\{\pi, 2\pi, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{17\pi}{6}\right\}$.

Bài 3. a) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $\cot x = \tan x + \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 4x}{\sin x\cos x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x + \cos 4x$

$\Leftrightarrow \left(2\cos^2 2x - 1\right) - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = l\pi\\ 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + l2\pi\end{array}\right. ,\ (l \in \mathbb{Z})$.

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$.

b) *Đáp số :* $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

c) *Đáp số :* $x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

d) *Đáp số :* $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

e) *Đáp số :* $x = k2\pi$ hoặc $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 4. a) Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi$, $(l \in \mathbb{Z})$.

$(1) \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow (5\sin x - 2)\cos^2 x = 3(1 - \sin x)\sin^2 x$

$\Leftrightarrow (5\sin x - 2)\left(1 - \sin^2 x\right) = 3(1 - \sin x)\sin^2 x$

$\Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1 + \sin x) = 3\sin^2 x$ (do $\cos x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 1$)

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\\ \sin x = -2\ \text{(loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right.\quad (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện : $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

$(1) \Leftrightarrow 2\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\sin 2x + \dfrac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow 4\sin^2 x + \cos 2x = 2\sin^2 2x + 1$

$\Leftrightarrow 2(1 - \cos 2x) + \cos 2x = 2\left(1 - \cos^2 2x\right) + 1$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=l2\pi\\ 2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+l2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=l\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+l\pi\end{array}\right.,\ (l\in\mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+l\pi$, $(l\in\mathbb{Z})$.

c) Vì $\dfrac{\pi}{4}+x=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$$

Do đó , điều kiện để phương trình có nghĩa là :

$$\begin{cases}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

$(1)\Rightarrow \sin^4 2x+\cos^4 2x=\cos^4 4x\ \Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x\cos^2 2x=\cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 4x=\cos^4 4x\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\left(1-\cos^2 4x\right)=\cos^4 4x$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 4x-\cos^2 4x-1=0\ \Leftrightarrow \cos^2 4x=1\Leftrightarrow \sin 4x=0$

$\Leftrightarrow 4x=l\pi,\ (l\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x=l\dfrac{\pi}{4},\ (l\in\mathbb{Z})$.

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là : $x=m\dfrac{\pi}{2}$, $(m\in\mathbb{Z})$.

d) Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

$(1)\Rightarrow \sin 2x.\sin x+\cos 2x.\cos x=\sin^2 x-\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \cos(2x-x)=1-2\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow 2.\cos^2 x+\cos x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Nếu $\cos x=-1\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow \sin 2x=0$ (không thỏa điều kiện) , nên

$$(1)\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+l2\pi,\ (l\in\mathbb{Z}).$$

e) $2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x.\cos x+1=3\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$

$\Leftrightarrow 1+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+1=3\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+1=3\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1=3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0\\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}\ \ (\text{vô nghiệm})\end{array}\right.\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

f) $3\sin x+\cos 2x+\sin 2x=4\sin x.\cos^2\dfrac{x}{2}$

$\Leftrightarrow 3\sin x+1-2\sin^2 x=2\sin x.(1+\cos x)-2\sin x.\cos x\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

g) $4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\cos 4x+\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 4\left(1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right)+1-2\sin^2 2x+\sin 2x=0\Leftrightarrow -4\sin^2 2x+\sin 2x+5=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=-1\\ \sin 2x=5/2\ \ (\text{vô nghiệm})\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \sin 2x=-1\Leftrightarrow 2x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

h) $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}-\frac{1}{2}\cot 2x=\frac{1}{8\sin 2x}$

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq l\frac{\pi}{2}$, $(l\in\mathbb{Z})$.

Ta có : $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{1}{8\sin 2x}$

$\Leftrightarrow 8\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=20\cos 2x-5\Leftrightarrow 8\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right)=20\cos 2x-5$

$\Leftrightarrow 8-4\sin^2 2x=20\cos 2x-5\Leftrightarrow 8-4\left(1-\cos^2 2x\right)=20\cos 2x-5$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x-20\cos 2x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=\frac{9}{2}\ (\text{loại})\\ \cos 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là : $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\ \left(k\in Z\right)$.

i) $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$

Điều kiện : $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta có: $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}\Leftrightarrow\cos 2x+2\sin^2 2x=1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=l2\pi\\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+m2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=l\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+m\pi\end{array}\right.,\left(l,m\in\mathbb{Z}\right)$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x=\pm\frac{\pi}{6}+m\pi$; $\left(m\in\mathbb{Z}\right)$.

j) $3\cos 4x-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$

Ta có : $3\cos 4x-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$

$\Leftrightarrow 3\left(2\cos^2 2x-1\right)-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$

$\Leftrightarrow 3\left[2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1\right]-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^6 x-12\cos^4 x+11\cos^2 x-3=0$

Đặt $t=\cos^2 x$, $\left(0\leq t\leq 1\right)$

Ta được : $4t^3-12t^2+11t-3=0$

$$\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(4t^2-8t+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{3}{2}\\ t=1\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos^2 x=\frac{1}{2}\\ \cos^2 x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\cos^2 x-1=0\\ \sin x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x=k\pi\end{array}\right.\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

k) $\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ (1)

$$\text{Điều kiện : }\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+m\pi\\ x\neq-\frac{\pi}{4}+n\pi\end{cases},\left(m,n\in\mathbb{Z}\right)$$

$(1)\Leftrightarrow\frac{(1+\sin x+\cos 2x).(\sin x+\cos x)}{1+\tan x}=\cos x$

$\Leftrightarrow\frac{(1+\sin x+\cos 2x).(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}\cos x=\cos x$

$\Leftrightarrow(1+\sin x+\cos 2x)=1\Leftrightarrow\sin x+\cos 2x=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

So với điều kiện , suy ra nghiệm của phương trình là :

$$x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\ \text{hay}\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Bài 5. a) *Đáp số :* Vô nghiệm vì $a^2+b^2=1+12=13<\frac{81}{4}=c^2$.

b) $3\cos x+2\sin x=\sqrt{13}\sin 7x$

$\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x+\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x=\sin 17x$, $\left(\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x+\varphi\right)=\sin 17x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\varphi}{16}+k\frac{\pi}{8}\\ x=\frac{\pi}{18}-\frac{\varphi}{18}+k\frac{\pi}{9}\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

c) $(\sqrt{3}-1)\sin x-(\sqrt{3}+1)\cos x+\sqrt{3}-1=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\sin x-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cos x=-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{5\pi}{12}.\sin x-\sin\frac{5\pi}{12}.\cos x=-\cos\frac{5\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}).$$

Bài 6. a) *Đáp số :* $x=k\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) *Đáp số :* $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ hoặc $x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$.

c) $4\sin^3 x-1=3\sin x-\sqrt{3}\cos 3x$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 x-3\sin x=1-\sqrt{3}\cos 3x\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 3x-\sin 3x=1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}).$$

Đáp số : $x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}$ hoặc $x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z})$.

d) *Đáp số :* $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

e) *Đáp số :* $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 7. a) *Đáp số :* $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{7},\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) *Đáp số :* $x=\pi+k2\pi$ hoặc $x=\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z})$.

c) *Đáp số :* $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

d) *Đáp số :* $x=-\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z})$.

e) *Đáp số :* $x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 8. a) $(1)\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left[\frac{1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2+\frac{1}{4}(1-\sin 2x)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)+(1-2\sin 2x+\sin^2 2x)=1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=1\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $(1)\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sqrt{3}+4\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos 2x\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{24}+k\pi \\ x=\frac{3\pi}{8}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

c) $(1)\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x-\frac{1}{2}\cos 7x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin 7x-\sin\frac{\pi}{6}\cos 7x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 7x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{84}+k\frac{2\pi}{7} \\ x=\frac{11\pi}{84}+l\frac{2\pi}{7} \end{array}\right., (k,l\in\mathbb{Z})$$

Tìm nghiệm $x\in\left(\frac{2\pi}{5};\frac{6\pi}{7}\right)$

- $\frac{2\pi}{5}<\frac{5\pi}{84}+k\frac{2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}\Leftrightarrow \frac{143}{120}<k<\frac{67}{24}\Rightarrow k=2\Rightarrow x=\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7}=\frac{53\pi}{84}$
- $\frac{2\pi}{5}<\frac{11\pi}{84}+l\frac{2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}\Leftrightarrow \frac{113}{120}<l<\frac{61}{24}\Rightarrow l=1,2$

Với $l=1\Rightarrow x=\frac{35\pi}{84}$ .Với $l=2\Rightarrow x=\frac{59\pi}{84}$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm thoả mãn điều kiện $x \in \left(\frac{2\pi}{5}; \frac{6\pi}{7}\right)$ là :

$$x = \frac{53\pi}{84}\ ;\ x = \frac{5\pi}{12}\ ;\ x = \frac{59\pi}{84}.$$

d) $(1) \Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x = 8$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin x - 2\sin^2 x\right) + \left(6\cos x - 6\sin x\cos x\right) + \left(7\sin x - 7\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(1 - \sin x\right) + 6\cos x\left(1 - \sin x\right) - 7\left(1 - \sin x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \sin x\right)\left(2\sin x + 6\cos x - 7\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ 2\sin x + 6\cos x - 7 = 0\ (2) \end{array}\right.$$

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $2\sin x + 6\cos x - 7 = 0\ (2)$ vô nghiệm (vì $2^2 + 6^2 < 7^2$).

e) Điều kiện : $2\cos^2 x + \cos x - 1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1 \\ \cos x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi + k2\pi \\ x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}(k \in \mathbb{Z})$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\left(1 + \cos 2x\right) + \left(\cos x + \cos 3x\right)}{\left(2\cos^2 x - 1\right) + \cos x} = \frac{2}{3}\left(3 - \sqrt{3}\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x + 2\cos 2x\cos x}{\cos 2x + \cos x} = \frac{2}{3}\left(3 - \sqrt{3}\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos x\left(\cos 2x + \cos x\right)}{\cos 2x + \cos x} = \frac{2}{3}\left(3 - \sqrt{3}\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x = \frac{2}{3}\left(3 - \sqrt{3}\sin x\right) \Leftrightarrow \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \tan\frac{\pi}{6}\sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + l2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + l2\pi \\ x = l2\pi \end{array}\right.\ (l \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x = l2\pi,\ (l \in \mathbb{Z})$.

f) Điều kiện: $\cos x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\quad (k \in Z)$

Ta có: $$\frac{\left(2 - \sqrt{3}\right)\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(2 - \sqrt{3}\right)\cos x - \left[1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow \left(2 - \sqrt{3}\right)\cos x - \left(1 - \sin x\right) = 2\cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + l\pi\ \ (l \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm phương trình : $x = \frac{4\pi}{3} + m2\pi\ \ (m \in Z)$.

Bài 9. a) $4\sin^2\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \cos x\right) - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 1 + \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \cos x\right) - \sqrt{3}\cos 2x = 2 - \sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = -2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = -\cos x \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = x - \pi + l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6} + l2\pi \end{array}\right.,\ (k, l \in \mathbb{Z})$$

Do $x \in (0\ ;\ \pi) \Rightarrow x = \frac{5\pi}{18};\ x = \frac{17\pi}{18};\ x = \frac{5\pi}{6}$.

Vậy nghiệm trên khoảng $(0;\pi)$ của phương trình là:

$$x = \frac{5\pi}{18}\ ;\ x = \frac{17\pi}{18}\ ;\ x = \frac{5\pi}{6}.$$

b) $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + 4\sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + 4\sin x + 1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 4\sin x + 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sqrt{3}\cos x + \sin x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$
- $\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z})$.

c) $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}.\cos x=2$

$$\Leftrightarrow\left[\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2+\sqrt{3}.\cos x=2\Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}.\cos x=2$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos x=2\Leftrightarrow 1+\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$$

$$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=1\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

d) $\sin^2 x+\sin x.\sin 4x+\cos^2 4x=\dfrac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x+\sin x.\sin 4x+\frac{1}{4}\cos^2 4x+\frac{3}{4}\cos^2 4x=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)^2=\frac{3}{4}\left(1-\cos^2 4x\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)^2=\frac{3}{4}\sin^2 4x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sin x+\dfrac{1}{2}\cos 4x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x \\ \sin x+\dfrac{1}{2}\cos 4x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x-\dfrac{1}{2}\cos 4x=\sin x \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x+\dfrac{1}{2}\cos 4x=-\sin x \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sin\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin x \\ \sin\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin(-x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 4x-\dfrac{\pi}{6}=x+k2\pi \\ 4x-\dfrac{\pi}{6}=\pi-x+k2\pi \\ 4x+\dfrac{\pi}{6}=-x+k2\pi \\ 4x+\dfrac{\pi}{6}=\pi+x+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=\dfrac{7\pi}{30}+k\dfrac{2\pi}{5} \\ x=-\dfrac{\pi}{30}+k\dfrac{2\pi}{5} \\ x=\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

e) Đặt $t=12\cos x+5\sin x+14$

$$\Rightarrow t-14+\frac{5}{t}+8=0\Leftrightarrow t^2-6t+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=5 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} 12\cos x+5\sin x=-13 \\ 12\cos x+5\sin x=-9 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \cos(x-\alpha)=-1 \\ \cos(x-\alpha)=-\dfrac{9}{13} \end{array}\right.,\left(\alpha=\arcsin\frac{5}{13}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\alpha+\pi+k2\pi \\ x=\alpha\pm\arccos\left(-\dfrac{9}{13}\right)+k2\pi \end{array}\right.,\left(\alpha=\arcsin\frac{5}{13}\,;\,k\in\mathbb{Z}\right).$$

f) ĐK: $\left\{\begin{array}{l} \sin x\neq-\dfrac{1}{2} \\ \sin x\neq 1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x\neq-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x\neq\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.,\ k\in Z\ \ (*)$

Phương trình tương đương

$$\cos x-2\sin x\cos x=\sqrt{3}(1-\sin x+2\sin x-2\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x-\sin 2x=\sqrt{3}(\sin x+\cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\sqrt{3}\ \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6}-x=2x+\dfrac{\pi}{3}-k2\pi \\ \dfrac{\pi}{6}-x=\pi-2x-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3} & (1) \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi & (2) \end{array}\right.;(k\in Z)$$

Nghiệm (2) loại do không thỏa mãn (*)

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3};(k\in\mathbb{Z})$.

g) $\sin x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}.\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(1-2\sin^2 x\right)+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}.\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}.\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

h) $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x.\cos 2x - \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x - \sin x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x = 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 10. *Đáp số :* a) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; b) $m \le -\sqrt{3}$ hoặc $m \ge \sqrt{3}$.

Bài 11. $m^2\sin x - m.\sin^2 x - m^2\cos x + m\cos^2 x = \sin x - \cos x$

$$\Leftrightarrow m^2(\sin x - \cos x) - m.(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin x - \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left[m^2 - m(\sin x + \cos x) - 1\right] = 0\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in \left(-\pi; \frac{5\pi}{2}\right) \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{9\pi}{4}$

Đáp số : $x = -\frac{3\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{9\pi}{4}$.

Bài 12. a) $y = (2+\sqrt{3})\sin x - \cos x$. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

$$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sin(x - \varphi),\ \left(\sin\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2+\sqrt{3}} \le y = (2+\sqrt{3})\sin x - \cos x \le 2\sqrt{2+\sqrt{3}},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ khi $\sin(x-\varphi) = 1$ với $\sin\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = -2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ khi $\sin(x-\varphi) = -1$ với $\sin\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

b) $y = 2(\sin x - \cos x)^2 + 2\cos 2x + 6\sin x.\cos x - 3$. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$$= 2(1 - \sin 2x) + 2\cos 2x + 3\sin 2x - 3$$

$$= \sin 2x + 2\cos 2x - 1 = \sqrt{5}\sin(2x + \varphi) - 1,\ \left(\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{5} - 1 \le y \le \sqrt{5} - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = \sqrt{5} - 1$ khi $\sin(2x + \varphi) = 1$ với $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = -\sqrt{5} - 1$ khi $\sin(2x + \varphi) = -1$ với $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

c) $y = \frac{2\sin x + \cos x + 4}{\sin x + \cos x - 2}$. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Miền giá trị của hàm số trên là $\forall y \in \mathbb{R}$ sao cho phương trình sau :

$$y = \frac{2\sin x + \cos x + 4}{\sin x + \cos x - 2}, \text{ có nghiệm } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \cos x + 2\sin x + 4 = y(\cos x + \sin x - 2), \text{ có nghiệm } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (y-1)\cos x + (y-2)\sin x = 4 + 2y, \text{ có nghiệm } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 + (y-2)^2 \ge (4+2y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 22y + 11 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-11-3\sqrt{11}}{2} \le y \le \frac{-11+3\sqrt{11}}{2}$$

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = \frac{-11+3\sqrt{11}}{2}$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = \frac{-11-3\sqrt{11}}{2}$.

d) $y = \frac{2\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 3}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Miền giá trị của hàm số trên là $\forall y \in \mathbb{R}$ sao cho phương trình sau :

$$y = \frac{\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 3}, \text{ có nghiệm } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \cos x + 1 = y(\sin x - \cos x + 3), \text{ có nghiệm } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y.\sin x - (y+1)\cos x = 1 - 3y, \text{ có nghiệm } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + (y+1)^2 \ge (1-3y)^2 \Leftrightarrow 7y^2 - 8y \le 0 \Leftrightarrow 0 \le y \le \frac{8}{7}$$

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = \frac{8}{7}$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 0$.

Bài 13. a) *Đáp số :* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) *Đáp số :* $x = k\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) *Đáp số :* $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

d) *Đáp số:* $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

e) *Đáp số:* $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 14. a) $2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\cos x-\sin x=0$ (*)

$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)^3=(3\cos x+\sin x).(\cos^2x+\sin^2x)$

$\Leftrightarrow\cos^3x+3\cos^2x.\sin x+3\cos x.\sin^2x+\sin^3x$

$=3\cos^3x+\cos^2x.\sin x+3\sin^2x.\cos x+\sin^3x$

$\Leftrightarrow2\cos^3x-2\cos^2x.\sin x=0\Leftrightarrow\cos^3x-\cos^2x.\sin x=0$

+ Dễ thấy $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$ là nghiệm của (*).

+ Khi $\cos x\neq0$, chia hai vế cho $\cos^3x$, ta được :

$1-\tan x=0\Leftrightarrow\tan x=1\Leftrightarrow x=\pi/4+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) *Đáp số :* $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

c) *Đáp số :* $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

d) *Đáp số :* $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\pm\pi/3+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

e) *Đáp số :* $x=k\pi$ hoặc $x=\pi/3+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. .

f) *Hướng dẫn giải :*

Điều kiện : $\begin{cases}\sin x\neq0\\\cos x\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\sin2x\neq0\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

$\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=8\sin x$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)\left(\sin^2x+\cos^2x\right)=8\sin^2x.\cos x$

$\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin^3x-7\sin^2x.\cos x+\sqrt{3}\sin x.\cos^2x+\cos^3x=0$

Bài 15. *Hướng dẫn giải :*

a) $2\cos^3x=\sin3x$

$\Leftrightarrow2\cos^3x=3\sin x-4\sin^3x\Leftrightarrow2\cos^3x=3\sin x\left(\sin^2x+\cos^2x\right)-4\sin^3x$

$\Leftrightarrow\sin^3x-3\sin x.\cos^2x+2\cos^3x=0$

b) $\cos^3x-4\sin^3x-3\cos x.\sin^2x+\sin x=0$

$\Leftrightarrow\cos^3x-4\sin^3x-3\cos x.\sin^2x+\sin x\left(\sin^2x+\cos^2x\right)=0$

$\Leftrightarrow\cos^3x-3\cos x.\sin^2x+\sin x.\cos^2x-3\sin^3x=0\cdots$

c) Điều kiện : $\sin x\neq0$

$\frac{\sin5x}{5\sin x}=1\Leftrightarrow\sin(3x+2x)=5\sin x$

$\Leftrightarrow\sin3x.\cos2x+\sin2x.\cos3x=5\sin x\left(\sin^2x+\cos^2x\right)$

$\Leftrightarrow\left(3\sin x-4\sin^3x\right)\left(\cos^2x-\sin^2x\right)+2\sin x.\cos x\left(4\cos^3x-3\cos x\right)$

$=5\sin^3x+5\sin x.\cos^2x$

$\Leftrightarrow12\sin^5x+20\sin^3x.\cos^2x=0$

d) $1+3\sin2x=2\tan x$

$\Leftrightarrow1+6\sin x.\cos x=2\frac{\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow\cos x\left(\sin^2x+\cos^2x\right)+6\sin x.\cos^2x=2\sin x\left(\sin^2x+\cos^2x\right)$

$\Leftrightarrow2\sin^3x-\sin^2x.\cos x-4\sin x.\cos^2x-\cos^3x=0\cdots$

(Bài này có thể giải bằng cách đặt ẩn phụ $t=\tan x$).

e) $\cos^3x+\sin^3x=2\left(\cos^5x+\sin^5x\right)$

$\Leftrightarrow\left(\cos^3x+\sin^3x\right)\left(\sin^2x+\cos^2x\right)=2\left(\cos^5x+\sin^5x\right)$

$\Leftrightarrow\sin^5x-\sin^3x.\cos^2x-\sin^2x.\cos^3x+\cos^5x=0$

f) $\sin^3x-\sqrt{3}\cos^3x=\sin x.\cos^2x-\sqrt{3}\sin^2x.\cos x$

$\Leftrightarrow\sin^3x+\sqrt{3}\sin^2x.\cos x-\sin x.\cos^2x-\sqrt{3}\cos^3x=0$

$\Leftrightarrow\tan^3x+\sqrt{3}\tan^2x-\tan x-\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=\pm1\\\tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z})$.

(Bài này có thể đưa về dạng tích).

Bài 16. $(m+1)\sin^2x-\sin2x+\cos2x=0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow(m+1)\frac{1-\cos2x}{2}-\sin2x+\cos2x=0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow2\sin2x+(1-m)\cos2x=m+1$ có nghiệm

$\Leftrightarrow2^2+(1-m)^2\geq(m+1)^2\Leftrightarrow4m\leq4\Leftrightarrow m\leq1$.

Bài 17. $(3m-2)\sin^2x-(5m-2)\sin2x+3(2m+1)\cos^2x=0$

$\Leftrightarrow(3m-2)\frac{1-\cos2x}{2}-(5m-2)\sin2x+3(2m+1)\frac{1-\cos2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2(5m-2)\sin 2x+(9m+1)\cos 2x=9m+1$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow 4(5m-2)^2+(9m+1)^2<(9m+1)^2 \Leftrightarrow (5m-2)^2<0$

Vậy không có giá trị nào của *m* làm cho phương trình vô nghiệm .

Bài 18. $y=A.\sin^2 x+B.\sin x.\cos x+C.\cos^2 x$

$$=A.\frac{1-\cos 2x}{2}+B.\frac{\sin 2x}{2}+C.\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[B.\sin 2x+(C-A)\cos 2x\right]+\frac{A+C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{B^2+(C-A)^2}.\sin(2x+\varphi)+\frac{A+C}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\sqrt{B^2+(C-A)^2}+\frac{A+C}{2}\le y\le \frac{1}{2}\sqrt{B^2+(C-A)^2}+\frac{A+C}{2}$$

Đáp số : $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{B^2+(C-A)^2}+A+C\right)$

Khi $\sin(2x+\varphi)=1$, $\left(\cos\varphi=\frac{B}{\sqrt{B^2+(C-A)^2}}\right)$

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{B^2+(C-A)^2}+A+C\right)$

Khi $\sin(2x+\varphi)=-1$, $\left(\cos\varphi=\frac{B}{\sqrt{B^2+(C-A)^2}}\right)$

Bài 19. Nếu x là số đo một góc của tam giác vuông thì $0<x\le\frac{\pi}{2}$

$\sin^3 x+\sin x.\sin 2x-3\cos^3 x=0$

$\Leftrightarrow \sin^3 x+2\sin^2 x.\cos x-3\cos^3 x=0$ (1)

Do $x=\frac{\pi}{2}$ không phải là nghiệm của phương trình , vậy $\cos x\ne 0$

$(1)\Leftrightarrow \tan^3 x+2\tan^2 x-3=0 \Leftrightarrow (\tan x-1)(\tan^2 x+3\tan x+3)=0$

$\Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi ,(k\in\mathbb{Z})$

Vì $0<x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân .

§4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP HAY DÙNG KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 1. a) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(2\cos x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos x=1/2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. ,\ (k\in Z).$$

b) Điều kiện : $\sin 2x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne l\frac{\pi}{2}$ $(l\in Z)$

$$\tan x=\cot x+4\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}+4\cos^2 2x=0 \Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}+4\cos^2 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x\left(\frac{1}{\sin 2x}+2\cos 2x\right)=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x(1+\sin 4x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin 4x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ,ta có nghiệm của phương trình là :

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right. ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

c) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin x.\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right).(\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. ,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

d) $\left(1+\sin^2 x\right).\cos x+\left(1+\cos^2 x\right).\sin x=1+\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos x\left(\sin x+\cos x\right)+\left(\sin x+\cos x\right)=\left(\sin x+\cos x\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x+\cos x-\sin x.\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\cos x\right)\left(\sin x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 1-\cos x=0\\ \sin x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \cos x=1\\ \sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. ,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Bài 2. *(Hướng dẫn giải)*

a) Điều kiện : $\cos x\neq 0$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\cos^4 x}=\frac{\left(2-\sin^2 2x\right).\sin 3x}{\cos^4 x}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\left(2-\sin^2 2x\right).\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \left(2-\sin^2 2x\right)\left(1-2\sin 3x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 2x=2\\ \sin 3x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \cdots\cdots$$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}\\ x=\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right. ,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

b) Điều kiện : $\left\{\begin{array}{l}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\neq l\dfrac{\pi}{2}\\ x\neq -\dfrac{\pi}{4}+m\pi\end{array}\right. ;\left(l,m\in\mathbb{Z}\right)$

$$(2)\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-1=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}+\sin^2 x-\sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\cos x\left(\cos x-\sin x\right)-\sin x\left(\cos x-\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sin x\right)\left(1-\sin x.\cos x+\sin^2 x\right)=0\cdots\cdots$$

Đáp số: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

c) Điều kiện : $\cos x\neq 0$

$$(3)\Leftrightarrow 3\left(1+2\cos x\right)-\tan^2 x\left(1+2\cos x\right)=0\quad \Leftrightarrow \left(1+2\cos x\right)\left(3-\tan^2 x\right)=0$$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. ,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

d) Điều kiện: $\sin x+\cos x\neq 0\Leftrightarrow \tan x\neq -1\Leftrightarrow x\neq -\dfrac{\pi}{4}+l\pi\ \left(l\in\mathbb{Z}\right)$

Ta có: $\dfrac{\cos^2 x\left(\cos x-1\right)}{\sin x+\cos x}=2\left(1+\sin x\right)$

$\Leftrightarrow \cos^2 x\left(\cos x-1\right)=2\left(1+\sin x\right)\left(\sin x+\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \left(1-\sin^2 x\right)\left(\cos x-1\right)=2\left(1+\sin x\right)\left(\sin x+\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \left(1+\sin x\right)\left[\left(1-\sin x\right)\left(\cos x-1\right)-2\left(\sin x+\cos x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(1+\sin x\right)\left(\sin x+\cos x+\sin x\cos x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1+\sin x\right)^2\left(\cos x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ \cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. ,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

e) $\sin 4x\sin 7x=\cos 3x\cos 6x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 3x-\cos 11x)=\dfrac{1}{2}(\cos 9x+\cos 3x)\Leftrightarrow \cos 11x+\cos 9x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 10x.\cos x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 10x=0\\ \cos x=0\end{array}\right.$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{20}+k\dfrac{\pi}{10}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. ,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Bài 3. a) $4\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)=\cos x+3\sin x$

$\Leftrightarrow \left(3\sin x-4\sin^3 x\right)+\left(\cos x-4\cos^3 x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left[3-4\left(1-\cos^2 x\right)\right]+\cos x\left(1-4\cos^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(4\cos^2 x-1\right)+\cos x\left(1-4\cos^2 x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(4\cos^2 x-1\right)\left(\sin x-\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ \cos x=\pm\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \cos x=\pm\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

b) Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2}, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta có: $\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}=2\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=2\left(\cos x-\sin x\right) \Leftrightarrow \sin x-\cos x=2\sin x\cos x\left(\cos x-\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\cos x\right)\left(1+\sin 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ 1+\sin 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \sin 2x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

c) Ta có: $\cos 2x+\left(1+2\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x+\left(1+2\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sin x\right)\left[\left(\cos x+\sin x\right)-\left(1+2\cos x\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sin x\right)\left(\sin x-\cos x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=0\\ \sin x-\cos x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \vee x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right., \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

d) $\sin 2x+\cos 2x+3\sin x-\cos x-2=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x-\cos x+1-2\sin^2 x+3\sin x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x-1\right)-\left(2\sin^2 x-3\sin x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x-1\right)-\left(2\sin x-1\right)\left(\sin x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(\cos x-\sin x+1\right)=0$$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right., \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

e) $2\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos 2x=\sin 4x\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(2\sin x+\sin 2x\right)=2\sin 2x\cos 2x\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x\left(1+\cos x\right)=4\sin x\cos^2 x\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x\left(2\cos^2 x-\cos x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos 2x=0\\ 2\cos^2 x-\cos x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos 2x=0\\ \cos x=1\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \cos 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=k\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Bài 4. a) Ta có: $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$

$$\Leftrightarrow \left(\cos 3x-\cos x\right)+\left(\cos 2x-1\right)=0 \Leftrightarrow -2\sin 2x\sin x-2\sin^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin x\left(\sin 2x+\sin x\right)=0 \Leftrightarrow -2\sin x\left(2\sin x\cos x+\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x\left(2\cos x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

b) Ta có : $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+4\sin x+1=0$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+4\sin x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x+4\sin x+1-\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+4\sin x+2\sin^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sqrt{3}\cos x+\sin x+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x-\dfrac{\pi}{6}=\pi+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

c) Ta có: $\cos^3x+\sin^3x+2\sin^2x=1$

$$\Leftrightarrow\cos^3x+\sin^3x+2\sin^2x=\sin^2x+\cos^2x$$

$$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cos x)-(\cos^2x-\sin^2x)=0$$

$$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)\left[(1-\sin x\cos x)-(\cos x-\sin x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)\left[\sin x(1-\cos x)+1-\cos x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(1-\cos x)(\sin x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ \cos x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \cos x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

d) Ta có: $4\sin^3x+4\sin^2x+3\sin2x+6\cos x=0$

$$\Leftrightarrow4\sin^2x(\sin x+1)+6\cos x(\sin x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+1)(2\sin^2x+3\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+1)\left[2(1-\cos^2x)+3\cos x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+1)(2\cos^2x-3\cos x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ 2\cos^2x-3\cos x-2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \cos x=2\ (\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

e) Điều kiện: $\sin2x\neq0\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

$$\sin2x+\sin x-\frac{1}{2\sin x}-\frac{1}{\sin2x}=2\cot2x$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin2x-\frac{1}{\sin2x}\right)+\left(\sin x-\frac{1}{2\sin x}\right)-2\frac{\cos2x}{\sin2x}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin^22x-1}{\sin2x}+\frac{2\sin^2x-1}{2\sin x}-2\frac{\cos2x}{\sin2x}=0$$

$$\Leftrightarrow-\cos^22x-\cos2x.\cos x-2\cos2x=0$$

$$\Leftrightarrow\cos2x(\cos2x+\cos x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos2x=0\\ 2\cos^2x+\cos x+1=0\ (\text{VN})\end{array}\right.\Leftrightarrow\cos2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là : $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Bài 5. a) Ta có: $\sin\left(\dfrac{5x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\dfrac{3x}{2}$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow2\cos\frac{3x}{2}.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{3x}{2}\left[2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{3x}{2}=0\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{2\pi}{3}\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

b) Điều kiện : $\cos x\neq0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

$$(1-\tan x)(1+\sin2x)=1+\tan x$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}(\sin x+\cos x)^2=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)\left[\cos^2x-\sin^2x-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ \cos2x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \cos2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

So với điều kiện , ta có nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$.

c) $2\sin^22x+\sin7x-1=\sin x\Leftrightarrow\sin7x-\sin x=1-2\sin^22x$

$$\Leftrightarrow2\cos4x.\sin3x=\cos4x\Leftrightarrow\cos4x(2\sin3x-1)=0$$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{4}\\ x=\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}\\ x=\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$.

d) $(*) \Leftrightarrow 2\sin^3 x - 1 + 2\sin^2 x + \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x(\sin x + 1) - (1 - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x)(\sin x + 1) - (1 - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)\left[2(1 + \cos x)(\sin x + 1) - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(2\sin x + 2\cos x + 2\sin x.\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)\left[2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\sin x + \cos x)(2 + \sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \tan x = -1 \end{array}\right.$$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

e) Ta có : $\cos x \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} - \sin x \sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos x.\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x) - \sin x.\frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cos 2x + \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin x \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x) + \cos^2 x - 1 - \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x) - \sin^2 x - \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x) - \sin x(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos 2x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos 2x - \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \cos 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = -\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

f) $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - 1 + 2\sin^2 x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x + \sin x = -2 \quad (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 6. a) *Đáp số :* $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$.

b) *Đáp số :* $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = k2\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$.

c) *Đáp số :* $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = k2\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$.

d) *Đáp số :* $x = k\dfrac{\pi}{2}, \ (k \in \mathbb{Z})$.

e) *Đáp số :* $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 7. *Hướng dẫn giải :*

a) $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$

$$\Leftrightarrow 5(\sin x + \cos x) + 3\sin x - 4\sin^3 x - (4\cos^3 x - 3\cos x) = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow 8(\sin x + \cos x) - 4(\sin^3 x + \cos^3 x) = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$$

$\Leftrightarrow 8(\sin x + \cos x) - 4(\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x) = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$ Đặt $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2} \Rightarrow 2\sin x \cos x = t^2 - 1$

$$\Rightarrow 8t - 4t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 2\sqrt{2}(2 + t^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4t - 3t + t^3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}t^2 \Leftrightarrow t^3 - \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$$

Đáp số : $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

b) $(*) \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x.\cos x) = \sin x - \cos x \cdots\cdots$

Đáp số : $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; \ k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos^3 x + \sin^3 x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x.\cos x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (*)

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

$$(*) \Rightarrow t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow t^3-3t+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2} \\ t=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

$t=\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}<-\sqrt{2}$ (loại).

Vậy ta được : $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{array}\right.$

Đáp số : $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$ hoặc $x=-\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+k2\pi$

hoặc $x=\dfrac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+k2\pi$.

d) $\left(2\sin x-1\right)\left(2\sin 2x+2\cos x-1\right)=3-4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(2\sin 2x+2\cos x-1\right)=3-4\left(1-\sin^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(2\sin 2x+2\cos x-1\right)=4\sin^2 x-1$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(2\sin 2x+2\cos x-1\right)=\left(2\sin x-1\right)\left(2\sin x+1\right)$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(2\sin 2x+2\cos x-2\sin x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x-1=0 \\ \sin 2x-\left(\sin x-\cos x\right)-1=0 \end{array}\right.$

Đáp số: $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

hoặc $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi$.

Bài 8. *Hướng dẫn giải :*

a) $\cos^2 x+\sin^3 x+\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(1+\cos x\right)+\left(1-\cos^2 x\right).\sin x=0$

$\Leftrightarrow \left(1+\cos x\right)\left(\sin x+\cos x-\sin x.\cos x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi \\ \sin x+\cos x-\sin x.\cos x=0 \ \ (2) \end{array}\right.$

Xét: $\sin x+\cos x-\sin x.\cos x=0$ (2)

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right),\left(\left|t\right|\le\sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

$\Rightarrow t-\dfrac{t^2-1}{2}=0 \Leftrightarrow t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow t=1\pm\sqrt{2}$

Đáp số : $x=\pi+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

b) Điều kiện : $\begin{cases} \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\ne 0 \\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{4}+l\dfrac{\pi}{2},\left(l\in\mathbb{Z}\right)$

Do $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right).\cot\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=1$

$\sin^3 x+\cos^3 x=1-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

$\Leftrightarrow \sin^3 x+\cos^3 x=0 \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ (không thỏa điều kiện).

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) Điều kiện : $\begin{cases} \cos x\ne 0 \\ \sin x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{2}+l\pi,\left(l\in\mathbb{Z}\right)$

$\tan^2 x=\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x} \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$

$\Leftrightarrow \left(1-\cos x\right)\left[\left(1+\cos x\right)\sin^2 x-\cos^2 x\left(1+\sin x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin x+\cos x+\sin x.\cos x\right)=0$

Đáp số : $x=k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

hoặc $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\dfrac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

d) Điều kiện : $\cos x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{2}+l\pi,\left(l\in\mathbb{Z}\right)$

$3\tan^3 x-\tan x+\dfrac{3\left(1+\sin x\right)}{\cos^2 x}-8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-\tan x+3\left(1+\sin x\right)\left(1+\tan^2 x\right)-4\left[1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-\tan x+3\left(1+\sin x\right)\left(1+\tan^2 x\right)-4\left(1+\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow \tan x\left(3\tan^2 x-1\right)+\left(1+\sin x\right)\left(3\tan^2 x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3\tan^2 x-1\right)\left(\tan x+1+\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin x+\cos x+\sin.\cos x=0 \end{array}\right.$

Đáp số : $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 9. *Hướng dẫn giải:*

a) $\cos^4 x+\sin^4 x-2\left(1-\sin^2 x.\cos^2 x\right).\sin x.\cos x-\sin x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x.\cos^2 x-2\left(1-\sin^2 x.\cos^2 x\right).\sin x.\cos x-\sin x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x.\cos^3 x-2\sin^2 x.\cos^2 x-2\sin x.\cos x-\left(\sin x+\cos x\right)+1=0$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^3-2\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2-\left(t^2-1\right)-t+1=0$$

$$\Leftrightarrow t^6-5t^4+3t^2-4t+5=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^5+t^4-4t^3-4t^2-t-5\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t\approx 2,7\ \left(\textit{loại}\right)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

b) Điều kiện : $\cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+l\pi,\ \left(l\in\mathbb{Z}\right)$

$1+\tan x=2\sqrt{2}\sin x\Leftrightarrow \cos x+\sin x=2\sqrt{2}\sin x.\cos x$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\left(|t|\le\sqrt{2}\right)$

$$\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\Rightarrow t=\sqrt{2}\left(t^2-1\right)\Leftrightarrow \sqrt{2}.t^2-t-\sqrt{2}=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\ t=-1/\sqrt{2}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

c) $\cos^3 x+\sin^3 x=2\sin 2x+\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow\left(\cos x+\sin x\right)\left(1-\sin x.\cos x\right)=2\sin 2x+\sin x+\cos x$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

$$\Rightarrow t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=2\left(t^2-1\right)+t\Leftrightarrow t^3+4t^2-t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\pm 1\\ t=-4\end{array}\right.$$

d) Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Ta có: $t^2-1-2\sqrt{2}t-5=0\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\sqrt{2}\\ t=3\sqrt{2}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\ \Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

e) $\cos^3 x-\sin^3 x=-1\Leftrightarrow\left(\cos x-\sin x\right)\left(1+\sin x.\cos x\right)=-1$

Đặt $t=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$

$$\Rightarrow t\left(1+\frac{1-t^2}{2}\right)=-1\Leftrightarrow t^3-3t-2=0\Leftrightarrow t=-1$$

Đáp số: $\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\pi+k2\pi\end{array}$.

Bài 10. *Hướng dẫn giải :*

a) Điều kiện : $\sin 2x\ne 0\Leftrightarrow x\ne k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

$$\tan^2 x+\cot^2 x+\frac{1}{\sin 2x}=3\Leftrightarrow \tan^2 x+\cot^2 x+\frac{1}{2}\left(\tan x+\cot x\right)-3=0$$

Đặt $t=\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x},\left(|t|\ge 2\right)\Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$

Ta có : $2\left(t^2-2\right)+t-6=0\Leftrightarrow 2t^2+t-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-\frac{5}{2}\end{array}\right.$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2}{\sin 2x}=2\\ \frac{2}{\sin 2x}=-\frac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin 2x=-\frac{4}{5}\end{array}\right.\ \text{(thỏa điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{1}{2}\arcsin\left(-\dfrac{4}{5}\right) + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\left(-\dfrac{4}{5}\right) + k\pi \end{array}\right. , (k \in \mathbb{Z})$$

b) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$3\tan^2 x + 4\tan x + 4\cot x + 3\cot^2 x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\tan^2 x + \cot^2 x\right) + 4\left(\tan x + \cot x\right) + 2 = 0$$

Đặt $t = \tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$; $\left(|t| \geq 2\right) \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$

Ta có : $3\left(t^2 - 2\right) + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = \dfrac{2}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + l\pi, \ (l \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x = -\dfrac{\pi}{4} + l\pi$, $(l \in \mathbb{Z})$.

c) Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq l\dfrac{\pi}{2}$,$(l \in \mathbb{Z})$.

$$\tan^3 x - \cot^3 x + 2\left(\tan x - \cot x\right) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan x - \cot x\right)\left(\tan^2 x + \cot^2 x + 1\right) + 2\left(\tan x - \cot x\right) - 6 = 0$$

Đặt $t = \tan x - \cot x = -2\cot 2x \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 + 2$

Ta có : $t\left(t^2 + 2 + 1\right) + 2t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$$\Rightarrow -2\cot 2x = 1 \Leftrightarrow \cot 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan 2x = -2$$

$$\Leftrightarrow 2x = \arctan(-2) + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\arctan(-2) + k\frac{\pi}{2}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình:

$$x = \frac{1}{2}\arctan(-2) + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 11. *Hướng dẫn giải :*

a) Đặt , nên phương trình có dạng:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + t = 1 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\dfrac{x}{2} = 0 \\ \tan\dfrac{x}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. , (k \in \mathbb{Z}) .$$

b) Điều kiện : $\sin x \neq 0$. Dễ thấy $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm của phương trình

+ Khi $\cos x \neq 0$. Đặt $t = \tan x$, phương trình có dạng:

$$\frac{6t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4}{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

Vậy ta được: $\left[\begin{array}{l} \tan x = -2 \\ \tan x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan(-2) + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. , (k \in \mathbb{Z})$

Đáp số : $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = \arctan(-2) + k\pi(k \in \mathbb{Z})$.

c) $(3) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^5 = \dfrac{29}{16}\cos^4 2x$

Đặt $t = \cos 2x$, $(-1 \leq t \leq 1)$, suy ra phương trình trở thành :

$$\left(\frac{1-t}{2}\right)^5 + \left(\frac{1+t}{2}\right)^5 = \frac{29}{16}t^4 \Leftrightarrow \frac{1}{32}\left[(1-t)^5 + (1+t)^5\right] = \frac{29}{16}t^4$$

$$\Leftrightarrow 24t^4 - 10t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = \dfrac{1}{2} \\ t^2 = -\dfrac{1}{12} \end{array}\right. \Rightarrow t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$$

d) $\sin^4 x + \cos^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left[\dfrac{1+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 = \dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2 + (1-\sin 2x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Đáp số : $x = k\pi$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 12. a) $(1) \Leftrightarrow \sin^4 x + (\sin x - 1)^4 = 17$. Đặt $t = \sin x - \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = t + \frac{1}{2}$.

Ta có : $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -1 \le t + \frac{1}{2} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le t \le \frac{1}{2}$

Khi đó : $(1) \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^4 = 17$

$$\Leftrightarrow \left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 - 2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 = 17$$

$$\Leftrightarrow \left(2t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = 17 \Leftrightarrow 2t^4 + 3t^2 - \frac{135}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = \frac{9}{4} \\ t^2 = -\frac{15}{4}\ (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2}\ (\text{loại}) \\ t = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Chú ý: Để giải phương trình dạng: $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$,ta đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$.

b) Đặt $t = \cos x + \frac{1}{\cos x}$, $(|t| \ge 2) \Rightarrow t^2 = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2$

Vậy phương trình trở thành: $t^2 - 2 = t \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Rightarrow t = 2$

$$\Rightarrow \cos x + \frac{1}{\cos x} = 2 \Leftrightarrow \cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$$

Đáp số : $x = k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$.

c) $t = \frac{2}{\cos x} - \cos x \Rightarrow t^2 = \cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x} - 4$

Vậy phương trình trở thành :

$$2(t^2 + 4) + 9t - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 9t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\frac{7}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2}{\cos x} - \cos x = -1 \\ \frac{2}{\cos x} - \cos x = -\frac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \\ 2\cos^2 x - 7\cos x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = 2 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 4 \end{array}\right.$$

Đáp số: $x = \pi + k2\pi$ hoặc $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

d) Đặt $t = \sin x + \frac{1}{\sin x}$, $(|t| \ge 2) \cdots$. *Đáp số :* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 13. a) $8\cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos 4x(1 + \cos 4x) + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^2 4x + 4\cos 4x + 1) + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos 4x + 1)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos 4x + 1 = 0 \\ 1 - \cos 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\frac{1}{2} \\ \cos 3x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \\ x = l\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp nghiệm , ta được : $x = \pm\frac{2\pi}{3} + m2\pi,\ (m \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện : $\sin 4x \ne 0$ (*)

Ta có : $\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = = \frac{3}{4}\sin 4x$

Do đó : $(1) \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x - \sin x \sin^2 3x + \frac{1}{4}\sin^4 3x\right) + \frac{1}{4}\sin^2 3x - \frac{1}{4}\sin^4 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 3x(1 - \sin^2 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x = 0 \\ \sin^2 3x(1 - \sin^2 3x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin^2 3x = 1 \end{cases} \text{(I) hoặc } \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 3x = 0 \end{cases} \text{(II)}$$

* Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin 3x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ 3\sin x - 4\sin^3 x = \pm 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}\ \text{(thoả (*))} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

* Hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x(3 - 4\sin^2 x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 0$

Không thỏa điều kiện (*).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$.

c) $\cos 2x-\cos 6x+4\left(3\sin x-4\sin^3 x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x-\left(1-2\sin^2 3x\right)+4\left(\sin 3x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sin^2 3x+2\sin 3x+1\right)+1+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sin 3x+1\right)^2+\left(1+\cos 2x\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 3x=-1 \\ \cos 2x=-1\end{cases} \ldots$

Đáp số : $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

d) $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2\left(x+y\right)=\dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1-\cos 2y}{2}+1-\cos^2\left(x+y\right)=\dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\left(x+y\right)+4\cos\left(x+y\right).\cos\left(x-y\right)+1=0$

$\Leftrightarrow \left[2\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)\right]^2+1-\cos^2\left(x-y\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[2\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)\right]^2+\sin^2\left(x-y\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)=0 \\ \sin\left(x-y\right)=0\end{cases} \ldots\ldots$

Đáp số : $\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}+\left(k+m\right)\pi \\ y=\dfrac{\pi}{3}+m\pi\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{3}+m\pi \\ y=-\dfrac{\pi}{3}-\left(k-m\right)\pi\end{cases}$, $\left(k,m\in\mathbb{Z}\right)$.

Bài 14. a) $\cos 2x+\cos\dfrac{3x}{4}-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x+\cos\dfrac{3x}{4}=1+1 \\ \cos 2x\le 1 \\ \cos\dfrac{3x}{4}\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=1 \\ \cos\dfrac{3x}{4}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=k\pi \\ x=l\dfrac{8\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x=m2\pi,\ \left(m\in\mathbb{Z}\right)$.

b) $\sin 3x.\cos 5x=1 \Leftrightarrow \sin 8x+\sin\left(-2x\right)=2 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 8x=1 \\ \sin\left(-2x\right)=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{16}+k\dfrac{\pi}{4} \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+l\pi\end{cases},\ \left(k,l\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x\in\varnothing$. Vậy phương trình vô nghiệm .

c) $\sin^8 x+\cos^{11} x=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^8 x\le\sin^2 x \\ \cos^{11} x\le\cos^2 x \\ \sin^8 x+\cos^{11} x=1=\sin^2 x+\cos^2 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^8 x=\sin^2 x \\ \cos^{11} x=\cos^2 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=0 \\ \sin x=1\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0 \\ \cos x=1\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1 \\ \cos x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi\end{array}\right.,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

d) $\sin 3x\left(\cos x-2\sin 3x\right)+\cos 3x\left(1+\sin x-2\cos 3x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin 3x.\cos x+\cos 3x.\sin x-2\sin^2 3x-2\cos^2 3x+\cos 3x=0$

$\Leftrightarrow \sin 4x+\cos 3x=2 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 4x=1 \\ \cos 3x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=l\dfrac{2\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$

Bài 15. a) *Đáp số :* $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

b) Dễ thấy $\begin{cases}\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x}\le 2 \\ 2\left(1+\sin^2 2x\right)\ge 2\end{cases}$, nên phương trình

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x}=2 \\ 2\left(1+\sin^2 2x\right)=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3x=\sqrt{2-\cos^2 3x} \\ \sin 2x=0\end{cases}$

- $\cos 3x=\sqrt{2-\cos^2 3x} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3x\ge 0 \\ \cos^2 3x=2-\cos^2 3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3x\ge 0 \\ \cos^2 3x=1\end{cases}$

  $\Leftrightarrow \cos 3x=1 \Leftrightarrow x=k\dfrac{2\pi}{3}\ (1),\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

- $\sin 2x=0 \Leftrightarrow x=l\dfrac{\pi}{2}\ (2),\ \left(l\in\mathbb{Z}\right)$

Biểu diễn các họ nghiệm (1) và (2) trên đường tròn lượng giác, ta thấy có một nghiệm chung $x=2m\pi,\ \left(m\in\mathbb{Z}\right)$ đó là chính nghiệm của phương trình.

c) $\cos 2x+8=7.\sin x \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x+8=7 \\ 7\sin x=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\cos 2x=0 \\ \sin x=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Ta có : $VT = \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$; $VF = \sqrt{2}(2 - \sin 3x) \ge \sqrt{2}$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}.\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}(2 - \sin 3x) = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \end{cases},\ (k\ ,\ l \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1. Tập xác định của các hàm số :

a) $y = \dfrac{2\sin x + \cos x}{\cos\left(4x + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}$ xác định khi và chi khi

$$\cos\left(4x + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \ne 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{3\pi}{40}\right).\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{13\pi}{40}\right) \ne 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{3\pi}{40}\right) \ne 0 \\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{13\pi}{40}\right) \ne 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7x}{2} + \frac{3\pi}{40} \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{x}{2} + \frac{13\pi}{40} \ne \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \frac{17\pi}{140} + k\frac{2\pi}{7} \\ x \ne \frac{7\pi}{20} + l2\pi \end{cases},(k,l \in \mathbb{Z}).$$

b) $y = \sqrt{\dfrac{2 + \cos x}{\sin 2x + 1}}$ xác định $\Leftrightarrow \sin 2x + 1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$.

c) $y = \dfrac{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 2}$ xác định

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 2 \ne 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x \ne -1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \ne -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} \ne -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x \ne -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) $y = \dfrac{\cot 2x}{\sin^2 x - 2\sin x.\cos x - 3\cos^2 x}$

xác định $\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x.\cos x - 3\cos^2 x \ne 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\tan x - 3 \ne 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \ne -1 \\ \tan x \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \ne \arctan 3 + l\pi \end{cases},\ (k,l \in \mathbb{Z})..$$

Bài 2. Cho hàm số: $y = f(x) = \sin(\pi x)$, Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

a) Ta thấy $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \Rightarrow D$ có tính đối xứng.

Mặt khác $f(-x) = \sin(-\pi x) = -\sin(\pi x) = -f(x), \forall x \in D$.

Vậy $y = f(x) = \sin(\pi x)$ là hàm số lẻ.

* Giả sử: $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \sin\pi(x + T) = \sin(\pi x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin(\pi x + \pi T) = \sin(\pi x), \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Khi cho $x = \frac{1}{2}$ thì (*) cũng phải đúng, tức là:

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi T\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi T = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow T = 2k, (k \in \mathbb{Z})$$

Ngược lại, dễ thấy: $\sin\pi(x + 2k) = \sin(\pi x + k2\pi) = \sin(\pi x), \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy, chỉ $\forall T = 2k, (k \in \mathbb{Z})$ thì ta mới có: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \pm T \in \mathbb{R} \\ f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

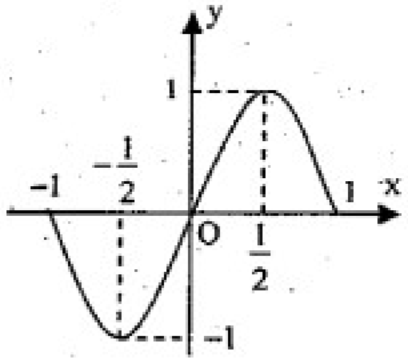
Tức là $y = f(x) = \sin(\pi x)$ là hàm số tuần hoàn, mặt khác trong các số $T = 2k, (k \in \mathbb{Z})$, thì số dương nhỏ nhất là $T = 2$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn có chu kì $T = 2$.

b) Bảng biến thiên:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1
$\pi.x$	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

Đồ thị:



Bài 3. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của:

a) $y = \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

b) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$

c) $y = \tan 3x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right]$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$.

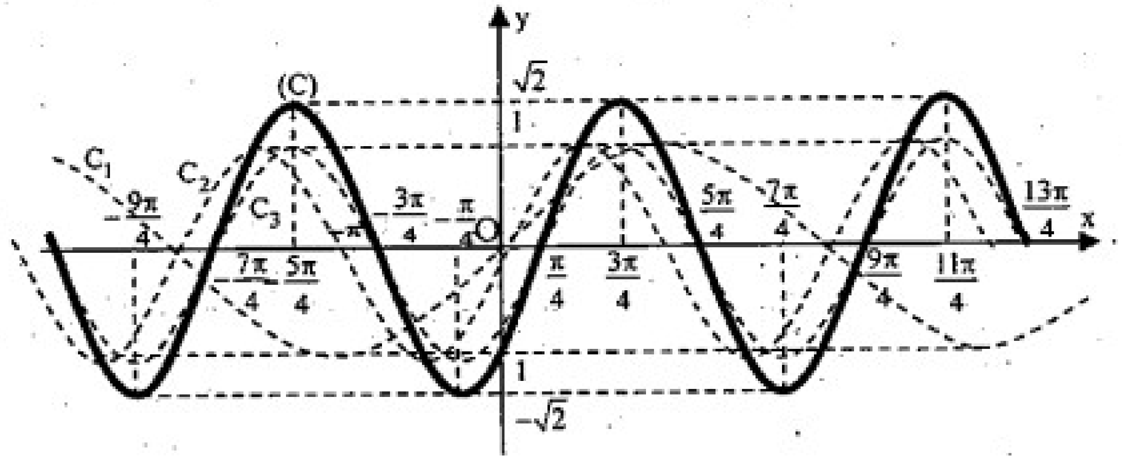
Bài 4. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = |\sin 2x - \cos 2x|$ .Ta có : $y = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}.\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. Tức là ta có: $y = |\sin 2x - \cos 2x| = \left|\sqrt{2}.\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$, nên ta có thể vẽ đồ thị của hàm số đã cho như sau:

+ Từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (C_1) co theo phương trục hoành về phía trục tung với hệ số $k = \frac{1}{2}$ ta được đồ thị của hàm số : $y = \sin 2x$ (C_2).

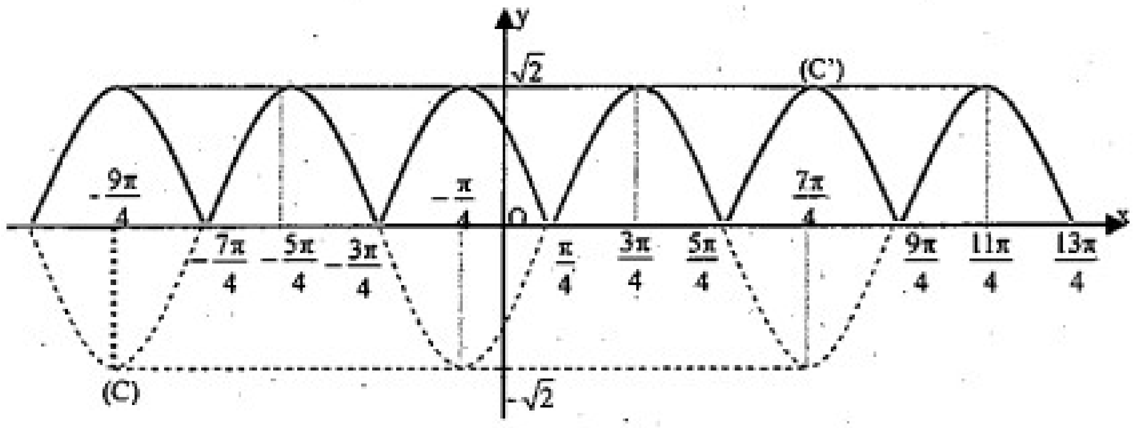
+ Tịnh tiến (C_2) theo véctơ $\vec{u} = \left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ ta được đồ thị của hàm số $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) (C_3)$.

+ Giãn theo phương trục tung về hai phía trục hoành với hệ số $k = \sqrt{2}$ ta được đồ thị của hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}.\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ (C).



+ Giữ nguyên phần của (C) phía trên trục hoành , lấy đối xứng qua trục hoành phần phía dưới trục hoành , ta được đồ thị của hàm số cần vẽ:

$$y = |\sin 2x - \cos 2x| \quad (C').$$



b) $y = \tan|x| - \cot|x|$

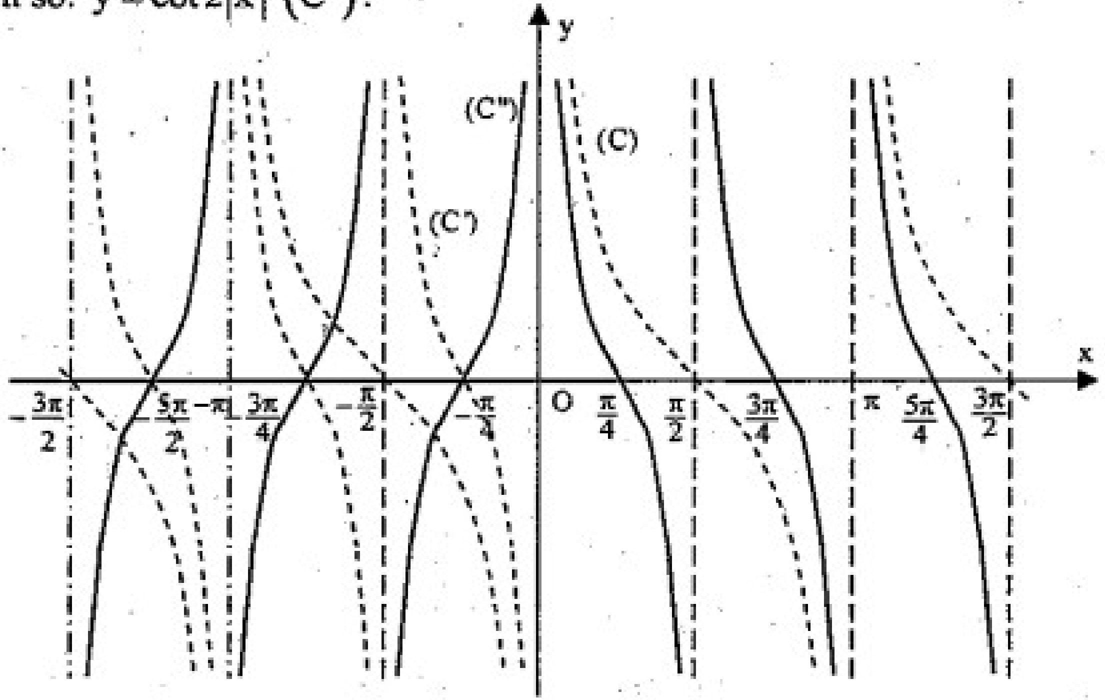
Ta có : $y = \tan x - \cot x = -2\cot 2x$. Tức là ta có:

$y = \tan|x| - \cot|x| = -2\cot 2|x|$, nên ta có thể vẽ đồ thị của hàm số đã cho như sau:

+ Vẽ đồ thị của hàm số : $y = \cot x$ (C).

+ Co theo phương trục hoành về trục tung với hệ số $k = \frac{1}{2}$, ta được đồ thị của hàm số : $y = \cot 2x$ (C').

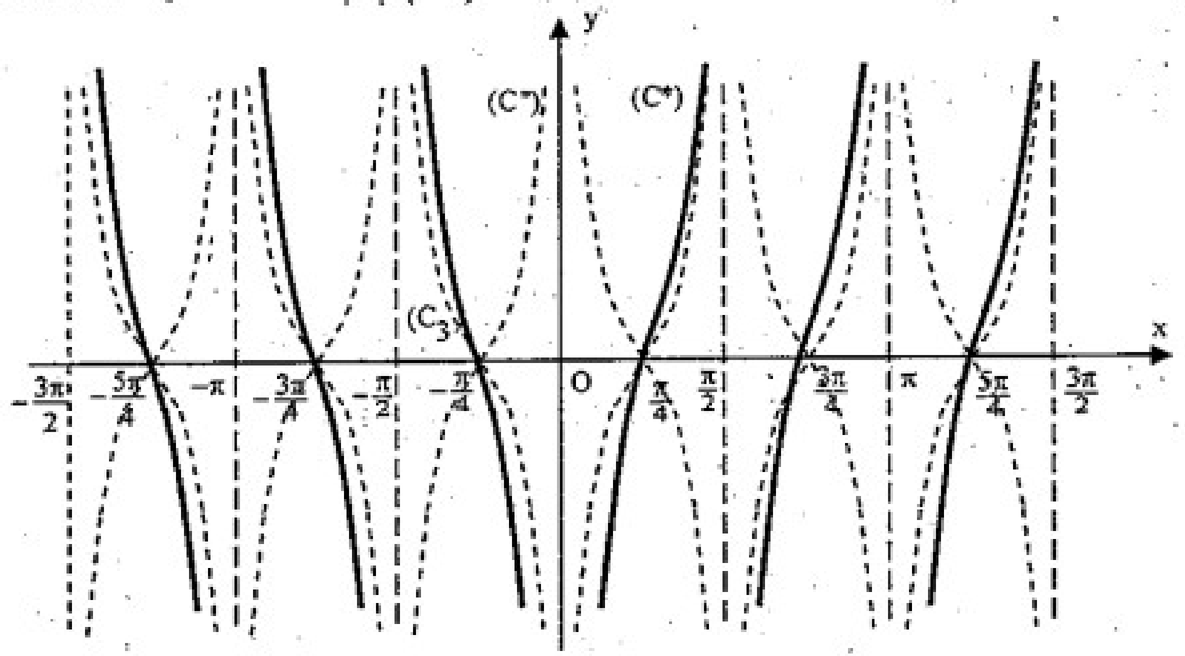
+ Giữ nguyên phần của (C') phía bên phải trục tung, bỏ phần của (C') phía bên trái *Oy* , lấy đối xứng phần còn lại của (C') qua *Oy* ta được đồ thị của hàm số: $y = \cot 2|x|$ (C").



+ Lấy đối xứng (C") qua trục *Ox* ta được đồ thị của hàm số :

$$y = -\cot 2|x| \ (C_3).$$

+ Giãn theo phương trục tung về hai phía với trục hoành, ta được đồ thị của hàm số $y=-2\cot 2|x|$ (C^*). Chính là đồ thị cần vẽ.



Bài 5. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$.

Nên : $\max\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]} y=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]} y=y\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-1$.

b) $y=\cos(\pi x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$. Ta có bảng biến thiên sau:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
π.x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↘	0 ↘	−1 ↗	0

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

$\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]} y=y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\min\limits_{x\in\left[\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]} y=y(1)=-1$.

c) $y=\sqrt{4-3\cos^2 3x}+1$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có : $y=\sqrt{4-3\cos^2 3x}+1=\sqrt{1+3\sin^2 3x}+1$

Vì $1\le\sqrt{1+3\sin^2 3x}\le 2$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 2\le y\le 3$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

+ $y=2\Leftrightarrow \sin^2 3x=0\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=2$ khi $x=k\frac{\pi}{3}$

+ $y=3\Leftrightarrow \sin^2 3x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=3$ khi $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$

d) $y=4\sin^2 x+3\cos 2x-5$. Tập xác định : $D=\mathbb{R}$

Ta có : $y=4\sin^2 x+3\cos 2x-5=2(1-\cos 2x)+3\cos 2x-5=-3+\cos 2x$

$\Rightarrow -4\le y=-3+\cos 2x\le -2$, $\forall x\in\mathbb{R}$

+ $y=-4\Leftrightarrow \cos 2x=-1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-4$ khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

+ $y=-2\Leftrightarrow \cos 2x=1\Leftrightarrow x=k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-2$ khi $x=k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

e) $y=(\sin 2x-2\cos 2x)(2\sin 2x+\cos 2x)+4$. Tập xác định : $D=\mathbb{R}$

Ta có : $y=2\sin^2 2x-3\sin 2x.\cos 2x-2\cos^2 2x+4$

$=1-\cos 4x-\frac{3}{2}\sin 4x-1-\cos 4x+4=-\frac{3}{2}\sin 4x-2\cos 4x+4$

$=-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\sin 4x+\frac{4}{5}\cos 4x\right)+4=-\frac{5}{2}\sin(4x+\varphi)+4$, $\left(\sin\varphi=\frac{4}{5}\right)$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}\le y\le\frac{13}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

+ $y=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \sin(4x+\varphi)=1$, $\left(\sin\varphi=\frac{4}{5}\right)$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-\frac{3}{2}$ khi $\sin(4x+\varphi)=1$, $\left(\sin\varphi=\frac{4}{5}\right)$.

+ $y=\frac{13}{2}\Leftrightarrow \sin(4x+\varphi)=-1$, $\left(\sin\varphi=\frac{4}{5}\right)$

$\Rightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\frac{13}{2}$ khi $\sin(4x+\varphi)=-1$, $\left(\sin\varphi=\frac{4}{5}\right)$.

f) $y=2\sin^2 3x+\sin 6x+\cos^2 3x$. Tập xác định : $D=\mathbb{R}$

Ta có : $y=1-\cos 6x+\sin 6x+\frac{1+\cos 6x}{2}=\sin 6x-\frac{1}{2}\cos 6x+\frac{3}{2}$

$=\sin 6x-\frac{1}{2}\cos 6x+\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.\sin(6x-\varphi)+\frac{3}{2}$, $\left(\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}\le y\le\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$+\ y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow \sin(6x-\varphi)=-1,\ \left(\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$\Rightarrow \min_{x\in\mathbb{R}} y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ \text{khi}\ \sin(6x-\varphi)=-1,\ \left(\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

$+\ y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow \sin(6x-\varphi)=1,\ \left(\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$\Rightarrow \max_{x\in\mathbb{R}} y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\ \text{khi}\ \sin(6x-\varphi)=-1,\ \left(\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

g) $y=\dfrac{4\sin x+\cos x-3}{\sin x-\cos x+2}$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Miền giá trị của hàm số trên là $\forall y\in\mathbb{R}$ sao cho phương trình sau:

$$y=\frac{4\sin x+\cos x-3}{\sin x-\cos x+2},\ \text{có nghiệm}\ x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x+\cos x-3=y(\sin x-\cos x+2),\ \text{có nghiệm}\ x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\cos x-(y-4)\sin x=3+2y,\ \text{có nghiệm}\ x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2+(y-4)^2\ge(3+2y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y^2+18y-8\le0\Leftrightarrow y^2+9y-4\le0\Leftrightarrow \frac{-9-\sqrt{97}}{2}\le y\le\frac{-9+\sqrt{97}}{2}$$

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\dfrac{-9+\sqrt{97}}{2}$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\dfrac{-9-\sqrt{97}}{2}$.

h) $y=\dfrac{\sin^2 x+\sin 2x+3\cos^2 x}{3\sin 2x-\cos 2x+4}$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có : $y=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\sin 2x+\frac{3}{2}(1+\cos 2x)}{3\sin 2x-\cos 2x+4}=\dfrac{\sin 2x+\cos 2x+2}{3\sin 2x-\cos 2x+4}$

Miền giá trị của hàm số trên là $\forall y\in\mathbb{R}$ sao cho phương trình sau :

$$\frac{\sin 2x+\cos 2x+2}{3\sin 2x-\cos 2x+4}=y\ ,\ \text{có nghiệm}\ x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x+2=y(3\sin 2x-\cos 2x+4),\ \text{có nghiệm}\ x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (3y-1)\sin 2x-(y+1)\cos 2x=2-4y,\ \text{có nghiệm}\ x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (3y-1)^2+(y+1)^2\ge(2-4y)^2$$

$$\Leftrightarrow 6y^2-12y+2\le0\Leftrightarrow 3y^2-6y+1\le0\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{6}}{3}\le y\le\frac{3+\sqrt{6}}{3}$$

Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $\cot^2 x+2\tan x-1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Điều kiện: $\sin 2x\ne0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 x}+2\tan x-1=1+\tan^2 x\Leftrightarrow \tan^4 x-2\tan^3 x+2\tan^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x(\tan^2 x-2\tan x+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan^2 x=0\\ \tan^2 x-2\tan x+2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$$

So với điều kiện , ta thấy phương trình vô nghiệm .

b) $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x+\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{4}\Leftrightarrow \sin^4 x+1-\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cos^2 2x-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow 1-2\cos 2x+\cos^2 2x-2\cos^2 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x+2\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x+2)=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$$

c) $\dfrac{3}{\cos x}=3+2\tan^2 x$. Điều kiện : $\cos x\ne0$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\cos x}=3+2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right).\ \text{Đặt}\ t=\frac{1}{\cos x},(t\ge1)$$

Lúc đó ta có : $3t=3+2(t^2-1)\Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{1}{2}\ (\text{loại})\end{array}\right.$

Vậy ta được : $\dfrac{1}{\cos x}=1\Leftrightarrow 1=\cos x\Leftrightarrow x=k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$

So sánh điều kiện , ta có nghiệm của phương trình : $x=k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

d) $6\sin^2 3x+\cos 12x=4\Leftrightarrow 3(1-\cos 6x)+\cos 12x=4$

$$\Leftrightarrow 1-\cos 12x+3\cos 6x=0\Leftrightarrow 2\sin^2 6x+3\cos 6x=0$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^2 6x+3\cos 6x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x=2\ (\text{vô nghiệm})\\ \cos 6x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3},(k\in\mathbb{Z}).$$

Bài 7.

a) $\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=-\frac{\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\sqrt{3}\sin 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=1\ \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ldots\ldots$$

c) $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}\left(\sin 6x+\cos 8x\right)$

$\Leftrightarrow \sin 8x-\sqrt{3}\cos 8x=\sqrt{3}\sin 6x+\cos 6x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 8x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 8x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}\cos 6x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)\ldots\ldots$$

d) $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}+1\right)\sin 2x+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos 2x=2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\cos 2x=1\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)=1$$

e) $\sin x+\cos x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{10}{3}$. Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin x+\cos x+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x.\cos x}=\frac{10}{3}\ (*)$$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2},\ \left(|t|\le\sqrt{2}\right)$

Khi đó (*) trở thành : $t+\frac{2t}{t^2-1}=\frac{10}{3}$

$$\Leftrightarrow 3t^3-10t^2+3t+10=0\Leftrightarrow (t-2)\left(3t^2-4t-5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\frac{2\pm\sqrt{19}}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow t=\frac{2-\sqrt{19}}{3}$$

Vậy ta được $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{19}}{3}\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}\right)+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Bài 8. a) $2\sin^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x.\cos x+\left(1-\sqrt{3}\right)\cos^2 x=1$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x.\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \tan^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\tan x-\sqrt{3}=0$, (do $\cos x\neq 0$)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

b) $3\cos^4 x-4\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x=0$

$\Leftrightarrow \tan^4 x-4\tan^2 x+3=0$, (do $\cos x\neq 0$)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan^2 x=1\\ \tan^2 x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=\pm 1\\ \tan x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

c) $3\sin^2\frac{x}{2}.\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)+3\sin^2\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right).\cos\frac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2\frac{x}{2}.\sin\frac{x}{2}+3\sin^2\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}+\cos^3\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^3\frac{x}{2}+3\sin^2\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3\frac{x}{2}+3\tan^2\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}-1=0\ ,\left(\text{do}\cos\frac{x}{2}\neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan\frac{x}{2}=-1\\ \tan\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi.\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

d) $\sqrt{3}\sin x.\cos x-\sin^2 x=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ldots\ldots$$

Bài 9.

a) $\sin 2x.\sin 6x=\sin 7x.\sin x$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\cos 8x-\cos 4x\right)=-\frac{1}{2}\left(\cos 8x-\cos 6x\right)$$

$\Leftrightarrow \cos 6x-\cos 4x=0\Leftrightarrow -2\sin 5x.\sin x=0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 5x=0\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{5}\\ x=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{5},\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\sin 4x.\sin 5x+\sin 4x.\sin 3x-\sin 2x.\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x.\sin 5x+\cos x-\cos 7x-\cos x+\cos 3x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x.\sin 5x+2\sin 5x.\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow \sin 5x\left(\sin 4x+\sin 2x\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin 5x.\sin 3x.\cos x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 5x=0\\ \cos x=0\\ \sin 3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{5}\\ x=\pi/2+k\pi\\ x=k\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Bài 10. a) $\cos x.\cos 5x=\cos 2x.\cos 4x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos 6x+\cos 4x\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 6x+\cos x\right)\Leftrightarrow \cos 4x-\cos x=0$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{5x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{5x}{2}=0\\ \sin\dfrac{3x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{2\pi}{5}\\ x=k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z})$$

b) $\cos x.\cos 3x-\sin 2x.\sin 6x-\sin 4x.\sin 6x=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos 4x+\cos 2x\right)+\frac{1}{2}\left(\cos 8x-\cos 4x\right)+\frac{1}{2}\left(\cos 10x-\cos 2x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \cos 10x+\cos 8x=0 \Leftrightarrow 2\cos 9x.\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 9x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{\pi}{9}\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

c) $\sin 4x+\sin 2x=\sin 6x \Leftrightarrow 2\sin 3x.\cos x=2\sin 3x.\cos 3x$

$\Leftrightarrow \sin 3x\left(\cos 3x-\cos x\right)=0 \Leftrightarrow 2.\sin 3x.\sin 2x.\sin x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ \sin x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{3}\\ x=k\pi\\ x=k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

d) $\cos 22x+3\cos 18x+3\cos 14x+\cos 10x=0$

$\Leftrightarrow \cos 22x+\cos 10x+3\left(\cos 18x+\cos 14x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 16x.\cos 6x+6\cos 16x.\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\cos 16x\left(\cos 6x+3\cos 2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos 16x\left(4\cos^3 2x-3\cos 2x+3\cos 2x\right)=0 \Leftrightarrow \cos 16x.\cos^3 2x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 16x=0\\ \cos 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{32}+k\dfrac{\pi}{16}\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Bài 11. a) $\sin x+\sin 3x+2\sin 5x=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\sin 5x+\sin 3x+\sin 5x=0 \Leftrightarrow 2\sin 3x.\cos 2x+2\sin 4x.\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\left(\sin 3x+2\sin 2x.\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\left(3\sin x-4\sin^3 x+4\sin x.\cos^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\left(3\sin x-4\sin^3 x+4\sin x-4\sin^3 x\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\sin x\left(7-8\sin^2 x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin x=0\\ 7-4\left(1-\cos 2x\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k\pi\\ \cos 2x=-\dfrac{3}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=k\pi\\ x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)+k\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos x+\sin 2x=2\cos 2x.\cos x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\cos x+1\right)=\cos 2x\left(2\cos x+1\right)\Leftrightarrow \left(2\cos x+1\right)\left(\sin 2x-\cos 2x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \tan 2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Bài 12. a) $\cos^2 3x+\cos^2 4x=\cos^2 5x+\cos^2 6x$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1+\cos 10x}{2}+\frac{1+\cos 12x}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 6x+\cos 8x=\cos 10x+\cos 12x \Leftrightarrow 2\cos 7x.\cos x=2\cos 11x.\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos 11x-\cos 7x\right)=0 \Leftrightarrow -2\cos x.\sin 9x.\sin 2x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos x=0\\ \sin 9x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k\dfrac{\pi}{9}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{2}\\ x=k\dfrac{\pi}{9}\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos 8x$

$\Leftrightarrow \left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right)^2 - 2\sin^2 2x.\cos^2 2x = \cos 8x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x = \cos 8x$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 8x) = \cos 8x \Leftrightarrow \cos 8x = 1 \Leftrightarrow 8x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{4}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Bài 13. a) $\tan\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) + \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, \left(k \in \mathbb{Z}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \neq 0 \end{cases}$$

Thử trực tiếp vào điều kiện ta thấy $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm là : $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

b) $\tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right).\tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ (1) . Điều kiện $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \neq 0 \\ \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{\tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)}$$

(do $\tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ không thể là nghiệm của (1))

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{\cot\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - 2x = \frac{\pi}{3} - 3x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

So với điều kiện , suy ra nghiệm của phương trình là : $x = k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Bài 14. a) $\sin^2 x = \sin^2 3x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) \Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow 6x = \pm 2x + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{4}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin^2 2x + 2\sin^2 3x = 3 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + 1 - \cos 4x + 1 - \cos 6x = 3$

$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x.\cos 2x + \cos 4x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 4x\left(2\cos 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

c) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) + \cos^2 3x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos x + 2\cos^2 3x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x\left(\cos 3x + \cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos 3x.\cos 2x.\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

d) $\cos^4 x + 2\sin^6 x = \cos 2x \Leftrightarrow \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 = \cos 2x$.

Đặt $t = \cos 2x$, $\left(-1 \le t \le 1\right)$, ta được: $\left(\frac{1 + t}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1 - t}{2}\right)^3 = t$

$$\Leftrightarrow t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(t - 1\right)^2\left(t - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy ta có : $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

e) $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 2x + \frac{1}{2\sin^2 2x} - 1 = 0$. Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \cos^2 2x + \frac{1}{2\sin^2 2x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^4 2x + 2\sin^2 2x.\left(1 - \sin^2 2x\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^4 2x - 2\sin^2 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

So với điều kiện , suy ra nghiệm của phương trình : $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Bài 15. a) Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$

$$\Leftrightarrow\left(1-\sin^2 x\right).\tan x+\left(1-\cos^2 x\right).\cot x+1+\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow\cos^2 x.\frac{\sin x}{\cos x}+\sin^2 x.\frac{\cos x}{\sin x}+1+\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x+\sin 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow\sin 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

So với điều kiện , suy ra nghiệm của phương trình : $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$.

b) $(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=3-4\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=3-4\left(1-\sin^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=4\sin^2 x-1$$

$$\Leftrightarrow(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=(2\sin x-1)(2\sin x+1)$$

$$\Leftrightarrow(2\sin x-1).2\cos 2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

c) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\sqrt{2}(\cos x+\cos 2x+\cos 3x)$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos x+\sin 2x=\sqrt{2}(2\cos 2x.\cos x+\cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow\sin 2x(2\cos x+1)=\sqrt{2}\cos 2x(2\cos x+1)$$

$$\Leftrightarrow(2\cos x+1)\left(\sin 2x-\sqrt{2}\cos 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2}\\ \tan 2x=\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{2}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

d) $\sin^3 x+\cos^3 x+\sin 2x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x(\sin x+\cos x)=\cos x+\sin x$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}-1}{2}.(\sin x+\cos x).\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \tan x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\frac{\pi}{2}\\ x=-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

Bài 16. *Hướng dẫn giải :*

a). Điều kiện : $\sin 3x\neq 0$

$$(*)\Leftrightarrow\cos 2x.\cot 3x-\sin 2x-\sqrt{2}\cos 5x=0$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x.\cos 3x-\sin 2x.\sin 3x-\sqrt{2}\cos 5x.\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow\cos 5x-\sqrt{2}\cos 5x.\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow\cos 5x\left(1-\sqrt{2}.\sin 3x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 5x=0\\ \sin 3x=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\ldots\ldots$$

b) $(2\sin x+1).(3\cos 4x+2\sin x-4)+4\cos^2 x=3$

$$\Leftrightarrow(2\sin x+1).(3\cos 4x+2\sin x-4)+4\cos^2 x=3$$

$$\Leftrightarrow(2\sin x+1).(3\cos 4x+2\sin x-4)+4\left(1-\sin^2 x\right)=3$$

$$\Leftrightarrow(2\sin x+1).(3\cos 4x+2\sin x-4)+(1-2\sin x)(1+2\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin x+1=0\\ 3\cos 4x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-\frac{1}{2}\ldots\ldots\\ \cos 4x=1\end{array}\right.$$

c) $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(1-\sin x.\cos x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\left(|t|\leq\sqrt{2}\right)$

$$\Rightarrow\sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

Ta được : $t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow t^3-3t+\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\ t=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\ t=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy , ta có : $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$ ……

d) $1+\cot 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$. Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos^2 2x}$

$\Leftrightarrow (\sin 2x+\cos 2x)(1+\cos 2x)=\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x+\cos 2x+\sin 2x.\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x+\sin 2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 2x+\sin 2x=-1\end{array}\right.$ ……

e) $\sin\left(\dfrac{9\pi}{2}+4x\right)-3\cos\left(2x-\dfrac{15\pi}{2}\right)=1+2\sin 2x$, $(x\in[0\,;\pi])$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+4x\right)-3\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=1+2\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos 4x+3\sin 2x=1+\sin 2x$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x+\sin 2x-1=0\Leftrightarrow \sin 2x(1-2\sin 2x)=0$ ……

Bài 17. a) $\tan x+\dfrac{1}{\sin x}=|\cot x|$. Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x+\dfrac{1}{\sin x}=\cot x \quad \text{khi}\quad \cot x>0\\ \tan x+\dfrac{1}{\sin x}=-\cot x \quad \text{khi}\quad \cot x<0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sin x}=\cot x-\tan x \quad \text{khi}\quad \cot x>0\\ \dfrac{-1}{\sin x}=\cot x+\tan x \quad \text{khi}\quad \cot x<0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x.\cos x}\Leftrightarrow \cos x=2\cos^2 x-1 \quad \text{khi}\quad \cot x>0\\ \dfrac{-1}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin x.\cos x}\Leftrightarrow \cos x=-1\\ \text{(không thỏa điều kiện sinh } 2x\neq 0) \text{ khi } \cot x<0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ khi $\cot x>0$

+ Khi $\cos x=1\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow \sin 2x=0$ (không thỏa điều kiện)

+ Khi $\cos x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\Rightarrow x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$, (do $\cot x>0$).

Tóm lại , phương trình có nghiệm là : $x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

b) $\dfrac{\tan^2 x}{|\tan x-1|}=\left|\dfrac{\tan x}{\tan x-1}\right|+|\tan x|$, $\left(x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. Điều kiện : $\tan x\neq 1$

+ Khi $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$

$\Rightarrow(*)\quad\Leftrightarrow -\dfrac{\tan^2 x}{\tan x-1}=\dfrac{\tan x}{\tan x-1}-\tan x$, (do $\tan x<0$)

$\Leftrightarrow \tan x(\tan x+1-\tan x+1)=0\Leftrightarrow \tan x=0\Rightarrow x=0.$

+ Khi $x\in\left(0\,;\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow(*)\quad\Leftrightarrow -\dfrac{\tan^2 x}{\tan x-1}=-\dfrac{\tan x}{\tan x-1}+\tan x$, (do $0<\tan x<1$)

$\Leftrightarrow \tan x(\tan x-1+\tan x-1)=0$

$\Leftrightarrow 2\tan x(\tan x-1)=0\Rightarrow x=0$, (do $\tan x\neq 1$)

+ Khi $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow(*)\quad\Leftrightarrow \dfrac{\tan^2 x}{\tan x-1}=\dfrac{\tan x}{\tan x-1}+\tan x$, (do $\tan x>1$)

$\Leftrightarrow \tan x(\tan x-1-\tan x+1)=0\Leftrightarrow 0=0\Rightarrow \dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}.$

Vậy , nghiệm của phương trình thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là :

$$x=0 \text{ và } \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right).$$

c) $\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\cos 2x-\sin 2x$, $(x\in(0\,;2\pi))$. Điều kiện : $\sin x\neq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin 3x-\sin x}{\sqrt{2}|\sin x|}=\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x.\sin x}{|\sin x|}=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

+ Khi $x\in(0\,;\pi)\Rightarrow(*)\Leftrightarrow \cos 2x=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{16}+k\dfrac{\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$

Do $x\in(0\,;\pi)\Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{16}$, $x=\dfrac{15\pi}{16}$.

+ Khi $x\in(\pi\,;2\pi)$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow -\cos 2x = \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi-2x) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}, (k\in\mathbb{Z}).$$

Do $x\in(\pi;2\pi) \Rightarrow x=\frac{21\pi}{16}, x=\frac{29\pi}{16}$.

Vậy , nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0\ ;\ 2\pi)$ là :

$$x=\frac{7\pi}{16}, x=\frac{15\pi}{16}, x=\frac{21\pi}{16}, x=\frac{29\pi}{16}.$$

d) $\frac{\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1-\cos 2x}}{\cos 2x}=4\sin 2x\ (*) , \left(x\in(0\ ;\ \pi)\right)$.

Điều kiện : $\cos 2x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}|\cos x|+\sqrt{2}|\sin x|}{\cos 2x}=4\sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(|\sin x|+|\cos x|\right)=2\sin 4x$$

+ Khi $x\in\left(0\ ;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin x>0 , \cos x>0$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x+\cos x)=2\sin 4x \Leftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{3\pi}{20}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z})$$

Vì $x\in\left(0\ ;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x=\frac{\pi}{12}, x=\frac{3\pi}{20}$.

+ Khi $x\in\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right) \Rightarrow \sin x>0 , \cos x\leq 0$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x-\cos x)=2\sin 4x \Leftrightarrow 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z})$$

Vì $x\in\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right) \Rightarrow x=\frac{7\pi}{12}, x=\frac{13\pi}{20}$.

Vậy , nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0\ ;\ \pi)$ là:

$$x=\frac{\pi}{12}, x=\frac{3\pi}{20}, x=\frac{7\pi}{12}, x=\frac{13\pi}{20}.$$

e) $\frac{\cos\frac{4x}{3}-\cos^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}=0\ (*)$

Ta có : $1-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$, suy ra điều kiện : $\begin{cases}\cos 2x>0 \\ \cos x\neq 0\end{cases}$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \cos\frac{4x}{3}-\cos^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{4x}{3}-\frac{1+\cos 2x}{2}=0 \Leftrightarrow 2\cos 2\left(\frac{2x}{3}\right)-\cos 3\left(\frac{2x}{3}\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2x}{3}-2-4\cos^3\frac{2x}{3}+3\cos\frac{2x}{3}-1=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3\frac{2x}{3}-4\cos^2\frac{2x}{3}-3\cos\frac{2x}{3}+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{2x}{3}=1 \\ \cos\frac{2x}{3}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k3\pi \\ 2x=\pm\frac{\pi}{2}+k6\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z})$$

Vì $\cos 2x>0$ nên phương trình chỉ có nghiệm : $x=k3\pi , (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 18. $\cos x\sin x+|\cos x+\sin x|=m\quad(1)$

Đặt $t=|\sin x+\cos x| \Rightarrow 0\leq t\leq\sqrt{2} \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

suy ra (1) trở thành : $\frac{t^2-1}{2}+t=m \Leftrightarrow t^2+2t-1=2m\ (2)$

a) Khi $m=1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3\ (\textit{loại}) \end{array}\right.$

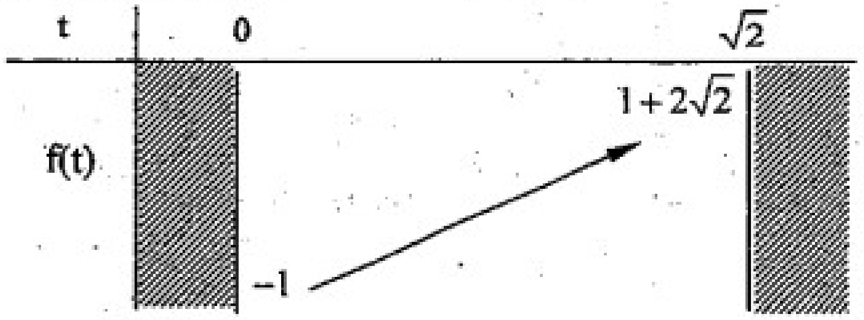
$$\Rightarrow |\cos x+\sin x|=1 \Leftrightarrow (\cos x+\sin x)^2=1 \Leftrightarrow 1+\sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $t\in\left[0\ ;\sqrt{2}\right]$

Xét hàm số : $f(t)=t^2+2t-1 , \left(t\in\left[0\ ;\sqrt{2}\right]\right)$

Ta có bảng biến thiên sau :



Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 \le 2m \le 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

Bài 19. Đáp số: $-1 \le m < 0$.

Bài 20. Nếu x là số đo một góc của tam giác thì $0 < x < \pi$

Xét : $\tan x - \tan\frac{x}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0$ (*). Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$, khi đó :

(*) trở thành : $\frac{2t}{1-t^2} - t - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0$

$$\Leftrightarrow 3t^3 + 2\sqrt{2}t^2 + 3t - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(3t^2 + 3\sqrt{3}t + 6\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Vì $0 < x < \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$: Vậy nếu số đo của các góc trong tam giác đều là nghiệm của (*) thì $A = B = C = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \Delta ABC$ đều .

Chương 2: TỔ HỢP – XÁC SUẤT

§1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN, HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quy tắc cộng:

1.1. Định nghĩa

Giả sử một công việc có thể thực hiện theo một trong k phương án khác nhau: $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k$. Trong đó phương án A_1 có n_1 cách thực hiện, phương án A_2 có n_2 cách thực hiện, ..., phương án A_k có n_k cách thực hiện. Khi đó công việc đó có thể thực hiện theo $n_1 + n_2 + ... + n_k$ cách khác nhau.

1.2. Chú ý:

Nếu ta kí hiệu số phần tử của một tập hữu hạn X là $|X|$ thì quy tắc cộng có thể được phát biểu dưới dạng sau :

- Nếu *A* và *B* là hai tập hữu hạn không giao nhau thì số phần tử của tập $A \cup B$ bằng số phần tử của A cộng với số phần tử của *B*.

  Tức là : $|A \cup B| = |A| + |B|$.

- Nếu *A* và *B* là hai tập hữu hạn giao nhau thì số phần tử của tập $A \cup B$ bằng số phần tử của *A* cộng với số phần tử của *B* rồi trừ đi số phần tử của $A \cap B$, (quy tắc cộng mở rộng)

  Tức là : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

2. Quy tắc nhân:

Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn: $A_1; A_2; A_3; ......; A_k$. Trong đó công đoạn A_1 có n_1 cách thực hiện, công đoạn A_2 có n_2 cách thực hiện, ..., công đoạn A_k có n_k cách thực hiện. Khi đó công việc đó có thể thực hiện theo $n_1.n_2.\cdots.n_k$ cách khác nhau.

3. Hoán vị – chỉnh hợp – tổ hợp

3.1. Giai thừa:

$n! = 1.2.3.....(n-1).n$

$0! = 1\ ;\ 1! = 1$

$n!.(n+1) = (n+1)!$

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1.2....k.(k+1)(k+2).....n}{1.2....k} = (k+1)(k+2)......n$$

$\left(\text{với } n; k \in \mathbb{Z}^+ ; k \le n\right)$.

3.2. Hoán vị:

- Mỗi cách sắp xếp n phần tử của tập *A* gồm n phần tử $(n \ge 1)$ theo một thứ tự nhất định gọi là một hoán vị của *n* phần tử đó.
  - ➢ Số hoán vị *n* phần tử là : $P_n = n!\ \ (n \in \mathbb{Z}^+)$
- Mỗi cách sắp xếp n phần tử trên một đường tròn theo một thứ tự nhất định, được gọi là một hoán vị tròn của n phần tử.
  - ➢ Số hoán vị tròn của n phần tử là : $\overline{P_n} = (n-1)!$
- Hoán vị lặp : Nếu tập *A* có *n* phần tử trong đó có các phần tử trùng nhau *k* lần, *l* lần … thì hoán vị các phần tử của *A* gọi là hoán vị lặp.
  - ➢ Số hoán vị lặp của n phần tử trong đó có các phần tử trùng nhau *k* , *l* … lần thì số hoán vị lặp là : $\widetilde{P_n} = \frac{n!}{k!.l!...}$.

3.3. Chỉnh hợp:

- Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k phần tử, $(1 \le k \le n)$ sắp thứ tự của tập A được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A.
- Số chỉnh hợp chập *k* của n phần tử là:

  $$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1)....(n-1).n$$

  - ➢ $A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$

3.4. Tổ hợp:

- Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử, $(0 \le k \le n)$ của tập A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.
- Số các tổ hợp chập k của n phần tử là: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- $C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow C_n^0 = C_n^n = 1$, $(0 \le k \le n)$.
- $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$, $(0 \le k \le n)$.

4. Các dấu hiệu chia hết :

- Số chia hết cho 2 : Có số tận cùng là 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8.
- Số chia hết cho 3 : Có tổng các chữ số chia hết cho 3.
- Số chia hết cho 4 : Có hai số tận cùng là 00 hoặc hợp thành hai số chia hết cho 4.
- Số chia hết cho 5 : Có số tận cùng là 0 ; 5.
- Số chia hết cho 6 : là số chia hết cho 2 và chia hết cho 3.
- Số chia hết cho 8 : Ba số tận cùng là 000 hoặc hợp thành một số chia hết cho 8.
- Số chia hết cho 9 : Có tổng các chữ số chia hết cho 9.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

1. Đếm số phần tử của một tập hữu hạn

1.1. Phương pháp:

Đây là loại toán cần sự suy luận logic,chặt chẽ, khi giải toán cần lưu ý các vấn đề sau :

- Xét xem công việc đếm số phần tử của một tập hợp được thực hiện theo các phương án khác nhau, hay muốn hoàn thành công việc trên ta phải thực hiện theo các bước liên tiếp nhau, để dùng quy tắc cộng hoặc nhân tương ứng.
- Khi chọn một bộ gồm k các đối tượng, cần xét xem có tính đến thứ tự của chúng hay không ? để dùng công thức tổ hợp hoặc chỉnh hợp.
- Nếu số cách chọn các đối tượng thỏa tính chất p nào đó quá nhiều trường hợp, ta có thể làm như sau : Số cách chọn thỏa p bằng số cách chọn tuỳ ý trừ số cách chọn không thỏa p. Người ta còn gọi cách làm này là dùng “gián tiếp”, hoặc gọi là phương pháp “loại trừ”.
- Một bài toán có thể phân tích theo nhiều hướng khác nhau nên sẽ có nhiều cách giải khác nhau, cần linh hoạt trong việc sử dụng các quy tắc cộng, quy tắc nhân hay các khái niệm về hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để được cách giải gọn nhất.

1.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số trong nửa khoảng $[3000 ; 4000)$ được tạo nên từ các số $0,1,2,3,4,5$ nếu :

a) Các chữ số của nó không nhất thiết khác nhau.

b) Các chữ số của nó khác nhau.

Lời giải

a) Các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số trong khoảng $[3000 ; 4000)$ có dạng $\overline{3abc}$ với a và b thuộc tập $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ còn $c \in \{0 ; 2 ; 4\}$.

Để tạo được một số dạng này ta phải thực hiện liên tiếp ba bước sau :

+ Chọn $a \in A$: có 6 cách.

+ Chọn $b \in A$: có 6 cách.

+ Chọn $c \in \{0, 2, 4\}$: có 3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân, ta có $6.6.3 = 108$ (số).

b) Để tạo được một số dạng này ta phải thực hiện liên tiếp ba bước sau :

+ Chọn $c \in \{0 ; 2 ; 4\}$: có 3 cách.

+ Chọn $b \in A \setminus \{3 ; c\}$: có 4 cách.

+ Chọn $a \in A \setminus \{3 ; c ; b\}$: có 3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân, ta có $3.4.3 = 36$ (số).

Ví dụ 2. Biển số đăng kí xe máy của các tỉnh trong cả nước hiện nay ngoài 2 chữ số kí hiệu mã tỉnh đầu tiên nó gồm 2 nhóm, nhóm 1 gồm 1chữ cái trong 26 chữ cái (không dùng 2 chữ cái I và O) và một số trong các số từ 1 đến 9, nhóm 2 gồm 4 chữ số trong các số $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ (chẳng hạn một biển số dạng : 71 F3 3027). Hỏi số xe máy được đăng kí nhiều nhất ở một tỉnh có thể là bao nhiêu ?

Lời giải

Để tạo được một biển số đăng kí xe máy, ta phải thực hiện liên tiếp theo các bước sau:

+ Chọn chữ cái thứ nhất có 24 cách (26 chữ nhưng không dùng 2 chữ I và O)

+ Chọn chữ số ở nhóm 1 có 9 cách.

+ Chọn 4 chữ số ở nhóm hai có 10^4 cách.

Do đó, theo quy tắc nhân số xe máy được đăng kí nhiều nhất ở một tỉnh có thể là : $24 \cdot 9 \cdot 10^4 = 2.160.000$ (xe).

Ví dụ 3. Từ các chữ số 1, 2, 4, 5, 7 có thể lập được

a) Bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số ;

b) Bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau ;

c) Bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau ;

d) Bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số khác nhau.

Lời giải

Đặt $A = \{1,2,4,5,7\}$. Số phải tìm có dạng : $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ trong đó $a_i \in A, \left(i = \overline{1,4}\right)$.

a) Để tạo được số tự nhiên có bốn chữ số (các chữ số có thể trùng nhau), ta phải thực hiện liên tiếp 4 bước sau :

+ Chọn $a_1 \in A$ có 5 cách.

+ Chọn $a_2 \in A$ có 5 cách.

+ Chọn $a_3 \in A$ có 5 cách.

+ Chọn $a_4 \in A$ có 5 cách.

Do đó theo quy tắc nhân ta có thể lập được : $5.5.5.5 = 625$ (số).

b) Mỗi số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau là số có dạng :

$$\overline{a_1a_2a_3a_4}, \left(a_1 \ne a_2 \ne a_3 \ne a_4\right)$$

Cách 1 : Để tạo được số dạng trên, ta phải thực hiện liên tiếp 4 bước sau :

+ Chọn $a_1 \in A$ có 5 cách.

+ Chọn $a_2 \in A\setminus\{a_1\}$ có 4 cách.

+ Chọn $a_3 \in A\setminus\{a_1\,;a_2\}$ có 3 cách.

+ Chọn $a_4 \in A\setminus\{a_1;a_2;a_3\}$ có 2 cách.

Vậy theo quy tắc nhân ta có thể lập được: $5.4.3.2 = 120$ (số) thỏa yêu cầu đề bài.

Cách 2: Mỗi một số dạng trên là một bộ gồm 4 số có tính đến thứ tự trong 5 số đ cho, nên mỗi số là một chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử thuộc A, do đó số các số cần tìm bằng: $A_5^4 = 120$ (số).

c) Để tạo được một số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau, ta phải thực hiện theo hai bước liên tiếp:

+ Chọn $a_4 \in \{2,4\}$: có 2 cách.

+ Chọn 3 chữ số thuộc $A\setminus\{a_4\}$ xếp vào các vị trí còn lại : có A_4^3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân có tất cả $2.A_4^3 = 48$ (số).

d) Số các số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau bằng : $120 - 48 = 72$ (số).

Ví dụ 4. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

a) Có bao nhiêu tập con *X* của *A* thỏa điều kiện *X* chứa 1 và không chứa 2 ?

b) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập *A* và không bắt đầu bởi 123 ?

Lời giải

a) Tập con *X* của *A* chứa 1 và không chứa 2 có dạng:

$X = \{1\} \cup Y$, trong đó *Y* là tập con của tập $B = \{3,4,5,6,7,8\}$.

Mà số tập con của *B* là $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + \cdots + C_6^6 = 2^6 = 64$

Do đó số tập con *X* thỏa yêu cầu bài toán là : $2^6 = 64$ (tập con).

b) Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

+ Trước hết ta tìm các số chẵn có năm chữ số khác nhau :

- Chọn $a_5 \in \{2,4,6,8\}$: có 4 cách
- Chọn bốn chữ số thuộc $A\setminus\{a_5\}$ xếp vào các vị trí còn lại : có A_7^4 cách

$\Rightarrow$ có $4.\,A_7^4 = 3360$ (số).

+ Tiếp theo ta tìm các số chẵn có 5 chữ số có dạng $\overline{123a_4a_5}$

- Chọn $a_5 \in \{4,6,8\}$: có 3 cách
- Chọn $a_4 \in A\setminus\{1,2,3,a_5\}$: có 4 cách

$\Rightarrow$ có $3.4 = 12$ (số).

Vậy các số chẵn gồm năm chữ số đôi một khác nhau không bắt đầu bởi 123 là:

$$3360 - 12 = 3348 \text{ (số)}.$$

Ví dụ 5. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có sáu chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

Lời giải

Đặt nhóm hai chữ số 2,3 là *a*.

+ Trước tiên ta tìm các số có sáu chữ số khác nhau dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ thỏa yêu cầu bài toán, trong đó chữ số a_1 có thể bằng 0 hoặc khác 0.

- Hoán vị *a*, 0, 1, 4, 5: có 5! cách
- Hoán vị hai chữ số 2 và 3 trong nhóm *a* : có 2 cách.

Vậy có: 2.5! = 240 (số).

+ Tiếp theo ta tìm các số có sáu chữ số khác nhau thỏa yêu cầu bài toán, có dạng $\overline{0a_2a_3a_4a_5a_6}$.

- Hoán vị *a*, 1, 4, 5: có 4! cách
- Hoán vị hai chữ số 2 và 3 trong nhóm *a*: có 2 cách

Vậy có: 2.4! = 48 (số).

Suy ra các số có 6 chữ số khác nhau trong hai chữ số 2 và 3 đứng cạnh nhau là:

$$240 - 48 = 192 \text{ (số)}.$$

Ví dụ 6. Cho 5 chữ số 0, 1, 3, 6, 9.

a) Có thể lập thành bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

b) Có thể thành lập bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3 ?

Lời giải

a) Đặt $A = \{0,1,3,6,9\}$. Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ $(a_1 \neq 0)$

Để tạo được một số dạng này ta có thể thược hiện theo một trong hai phương án sau :

+ *Phương án 1 :* $a_4 = 0$ (tức là số có dạng : $\overline{a_1a_2a_30}$), để tạo được số dạng này ta phải chọn 3 số thuộc $A\setminus\{0\}$ xếp vào 3 vị trí có thứ tự nên có : A_4^3 số

+ *Phương án 2 :* $a_4 \neq 0$ (tức là số có dạng : $\overline{a_1a_2a_36}$),,để tạo được số dạng này ta phải thực hiên theo 2 bước liên tiếp sau :

- Chọn $a_1 \in A\setminus\{0,a_4\}$: có 3 cách
- Chọn 2 chữ số thuộc $A\setminus\{a_1,a_4\}$ xếp vào các vị trí a_2, a_3 : có A_3^2 cách

Nên theo quy tắc nhân trường hợp này có: 3. A_3^2 = 18 (số).

Vậy theo quy tắc cộng số các số cần tìm là : 24 + 18 = 42 (số).

b) Số chia hết cho 3 phải có tổng các chữ số chia hết cho 3.Trong các tập con có bốn phần tử của A chỉ có một tập $B = \{0,3,6,9\}$ có tổng các phần tử chia hết cho 3, nên $a_1, a_2, a_3, a_4 \in B$, do đó để tạo được một số thỏa yêu cầu ta phải thực hiện theo các bước sau :

- Chọn $a_1 \in B\setminus\{0\}$: có 3 cách
- Chọn 3 chữ số còn lại thuộc $B\setminus\{a_1\}$ xếp vào các vị trí a_2, a_3, a_4 : có 3! cách.

Vậy có tất cả : 3.3! = 18 (số).

Ví dụ 7. Cho các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Từ các chữ số đã cho có bao nhiêu cách lập ra một số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau sao cho:

a) Số tạo thành là một số chẵn?

b) Số tạo thành là một số bé hơn hay bằng 345 ?
c) Số tạo thành là một số chẵn bé hơn hay bằng 345 ?

Lời giải

Đặt $A = \{1,2,3,4,5\}$. Số phải tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$

a) Để lập được một số chẵn dạng trên, ta thực hiện hai bước liên tiếp :

- Chọn $a_3 \in \{2,4\}$: có 2 cách
- Chọn hai số trong bốn chữ số còn lại thuộc $A \setminus \{a_3\}$ xếp vào các vị trí a_1, a_2 : có A_4^2 cách

Vậy có tất cả: $2.A_4^2 = 24$ số.

b) Số tạo thành là một số bé hơn hay bằng 345

* *Trường hợp 1 :* $a_1 = 1$

- Chọn $a_2 \in A \setminus \{1\}$: có 4 cách
- Chọn $a_3 \in A \setminus \{1, a_2\}$: có 3 cách

$\Rightarrow$ Trường hợp này có : $4.3 = 12$ số.

* *Trường hợp 2 :* $a_1 = 2$

- Chọn $a_2 \in A \setminus \{2\}$: có 4 cách
- Chọn $a_3 \in A \setminus \{2, a_2\}$: có 3 cách

$\Rightarrow$ Trường hợp này có : $4.3 = 12$ số.

* *Trường hợp 3 :* $a_1 = 3$

- Chọn $a_2 \in A \setminus \{3,5\}$: có 3 cách
- Chọn $a_3 \in A \setminus \{3, a_2\}$: có 3 cách

$\Rightarrow$ Trường hợp này có : $3.3 = 9$ số.

Vậy có tất cả : $12 + 12 + 9 = 33$ số.

c) Số tạo thành là một số chẵn bé hơn hay bằng 345

* *Trường hợp 1 :* $a_1 = 1$

- Chọn $a_3 \in \{2,4\}$: có 2 cách
- Chọn $a_2 \in A \setminus \{1, a_3\}$: có 3 cách

$\Rightarrow$ Trường hợp này có : $2.3 = 6$ số.

* *Trường hợp 2 :* $a_1 = 2$

- Chọn $a_3 = 4$: có 1 cách
- Chọn $a_2 \in A \setminus \{2,4\}$: có 3 cách

$\Rightarrow$ Trường hợp này có : 3 số.

* *Trường hợp 3 :* $a_1 = 3$

- Chọn $a_3 \in \{2,4\}$: có 2 cách
- Chọn $a_2 \in A \setminus \{3, a_3, 5\}$: có 2 cách

$\Rightarrow$ Trường hợp này có : $2.2 = 4$ số.

Vậy có tất cả : $6 + 3 + 4 = 13$ (số).

Ví dụ 8. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tính tổng của tất cả các số này.

Lời giải

Đặt $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$

Mỗi số có sáu chữ số khác nhau là một hoán vị của 6 phần tử thuộc *A*. Vậy có tất cả : $P_6 = 6! = 720$ (số).

* Tính tổng :

+ Trong 720 số vừa tìm được có 120 số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_51}$,

(vì mỗi số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ ứng với một hoán vị của 5 phần tử thuộc $\{2,3,4,5,6\}$).

+ Tương tự, mỗi dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_52}$, $\overline{a_1a_2a_3a_4a_53}$, $\overline{a_1a_2a_3a_4a_54}$, $\overline{a_1a_2a_3a_4a_55}$, $\overline{a_1a_2a_3a_4a_56}$ cũng có 120 số.

Vậy tổng tất cả các chữ số ở hàng đơn vị của 720 số là :

$$120.(1+2+3+4+5+6) = 120.21 = 2520$$

Lập luận tương tự ta cũng có tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn, hàng vạn đều là 2520. Vậy tổng 720 số vừa tìm là :

$$S = 2520.1 + 2520.10 + 2520.100 + 2520.1000 + 2520.10000 + 2520.100000$$
$$= 2520.\ 111111 = 279\,999\,720.$$

Cách khác :

Ta ghép các số vừa tìm được thành từng cặp có tổng bằng 777777. Chẳng hạn : 123456 và 654321, hoặc 345216 và 43261 …

Vì có 720 số, nên ta có : $\dfrac{720}{2} = 360$ (cặp).

Vậy tổng cần tìm là : $S = 360.777777 = 279\,999\,720$. (Cách này chỉ làm được khi tập *A* không chứa số 0).

Ví dụ 9. Đội học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất một em được chọn

(Dự bị A_1 – 2002).

Lời giải

Chọn 8 học sinh tùy ý từ 18 em trong đội tuyển : Có C_{18}^8 (cách)

Ta xét các trường hợp không thỏa yêu cầu bài toán :

- Chọn 8 học sinh từ khối 10 hoặc khối 11 : Có C_{11}^8 (cách)
- Chọn 8 học sinh từ khối 10 hoặc khối 12 : Có C_{12}^8 (cách)
- Chọn 8 học sinh từ khối 11 hoặc khối 12 : Có C_{13}^8 (cách)

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu bài toán là:

$$C_{18}^8 - \left(C_{11}^8 + C_{12}^8 + C_{13}^8\right) = 43758 - 1947 = 41811 \text{ (cách)}.$$

Ví dụ 10. Một người có 7 bi xanh, 5 bi đỏ, 4 bi đen. Yêu cầu cần lấy ra 7 bi có đủ 3 màu. Hỏi số cách lấy.

Lời giải

- o Nếu lấy tùy ý 7 bi từ 16 bi, số cách lấy: $C_{16}^7 = 11440$
- o Tìm số cách lấy vi phạm
  - ▪ Trường hợp 1: Không lấy bi xanh, lấy 7 bi từ 9 bi đỏ, đen, số cách lấy C_9^7
  - ▪ Trường hợp 2: Không lấy bi đỏ, lấy 7 bi từ 11 bi xanh, đen, số cách lấy C_{11}^7
  - ▪ Trường hợp 3: Không lấy bi đen, lấy 7 bi từ 12 bi xanh, đỏ, số cách lấy C_{12}^7

Trong quá trình đếm, khi lấy 7 bi toàn màu xanh được đếm cả ở trường hợp 2 và trường hợp 3 nên số cách lấy vi phạm là :

$$C_9^7 + C_{11}^7 + C_{12}^7 - 1 = 1157 \text{ cách}$$

Vậy số cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $11440 - 1157 = 10283$ cách.

Ví dụ 11. Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng dọc.

a) Có bao nhiêu cách xếp khác nhau ?

b) Có bao nhiêu cách xếp sao cho không có học sinh cùng giới tính đứng kề nhau ?

Lời giải

a) Mỗi cách xếp 5 nam và 5 nữ thành một hàng dọc là một hoán vị của 10 phần tử. Vậy có tất cả : $10! = 3628800$ (cách).

b) Ta có thể thực hiện theo một trong hai phương án sau:

* *Phương án 1 :* Nam đứng ở vị trí số lẻ, nữ đứng ở vị trí số chẵn

- ▪ Xếp 5 nam vào 5 vị trí số lẻ có $5!$ cách
- ▪ Xếp 5 nữ vào 5 vị trí số chẵn có $5!$ cách

Trường hợp này có: $5!.\ 5! = 14400$ (cách).

* *Phương án 2:* Nam đứng ở vị trí số chẵn, nữ đứng ở vị trí số lẻ

- ▪ Xếp 5 nữ vào 5 vị trí số lẻ có $5!$ cách
- ▪ Xếp 5 nam vào 5 vị trí số chẵn có $5!$ cách

Trường hợp này có : $5!.\ 5! = 14400$ (cách).

Từ hai trường hợp trên, ta có số cách xếp là: $14400 + 14400 = 28800$.

Ví dụ 12. Trong mặt phẳng cho đa giác đều (H) có 20 cạnh. Xét tam giác có đúng 3 đỉnh được lấy từ các đỉnh của (H).

a) Có tất cả bao nhiêu tam giác như vậy ?

b) Có bao nhiêu tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của (H)?

c) Có bao nhiêu tam giác có đúng một cạnh là cạnh của (H)?

d) Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào là cạnh của (H)?

Lời giải

a) Mỗi tam giác được tạo thành từ 3 trong số 20 đỉnh của đa giác (H) ứng với một tổ hợp chập 3 của 20 phần tử. Vậy có tất cả: $C_{20}^3 = 1440$ (tam giác).

b) Tìm số tam giác có hai cạnh là cạnh của đa giác.

- Chọn đỉnh thứ nhất của tam giác là đỉnh của (H): có 20 cách

- Chọn hai đỉnh còn lại của tam giác kề với đỉnh đã chọn (đỉnh bên trái và đỉnh bên phải của đỉnh đã chọn) : có 1 cách. Vậy có: 20.1 = 20 tam giác có hai cạnh là cạnh của (H).

c) Tìm số tam giác có đúng một cạnh là cạnh của đa giác.

- Chọn một cạnh của tam giác là cạnh của đa giác (H): có 20 cách
- Chọn đỉnh còn lại của tam giác không kề với 2 đỉnh đã chọn : có $20 - 4 = 16$ cách .Vậy số tam giác có một cạnh là cạnh của đa giác là : $20.16 = 320$ (tam giác).

c) Tìm số tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác.

Số tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác là:

$$1440 - (20 + 320) = 800 \text{ (tam giác)}.$$

Ví dụ 13. Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lí nam. Cần lập một đoàn công tác gồm 3 người cần có cả nam và nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lí. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? *(ĐHYD – HN – 2000).*

Lời giải

Để thực hiện công việc trên, ta có ba phương án sau:

+ Phương án 1 : Chọn 1 nhà toán học nam, 1 nhà toán học nữ, 1 nhà vật lí nam, phương án này có: $C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ cách.

+ Phương án 2 : Chọn 1 nhà toán học nữ,2 nhà vật lí nam, phương án này có: $C_3^1 \cdot C_4^2 = 18$ cách.

+ Phương án 3 : Chọn 2 nhà toán học nữ, 1 nhà vật lí nam, phương án này có: $C_3^2 \cdot C_4^1 = 12$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng, ta có : $60 + 18 + 12 = 90$ cách chọn.

Ví dụ 14. Một người có 8 bì thư và 6 tem thư, người đó cần gửi thư cho 3 người bạn. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn 3 bì thư và 3 tem thư sau đó dán mỗi tem lên mỗi bì thư để gửi thư.

Lời giải

Để thực hiện công việc đó người đó phải thực hiện liên tiếp 3 bước sau :

+ Chọn 3 bì thư trong 8 bì thư : có C_8^3 cách.

+ Chọn 3 tem thư trong 6 tem thư : có C_6^3 cách.

+ Dán 3 tem thư vào 3 bì thư : có P_3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân, số cách người đó có thể chọn là : $C_8^3 \cdot C_6^3 \cdot P_3 = 6720$.

Ví dụ 15. Gieo đồng thời 4 con xúc xắc. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra mà tổng số chấm trên các mặt xuất hiện của 4 con xúc xắc là 8.

Lời giải

Gọi a, b, c, d lần lượt là số chấm xuất hiện trên 4 con xúc xắc, mỗi một khả năng xảy ra là một bộ (a, b, c, d) với $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và $a + b + c + d = 8$. Vì 8 là số chẵn nên 4 số (a, b, c, d) chỉ có thể là 4 số đều chẵn hoặc là 4 số đều lẻ hoặc 2 số lẻ 2 số chẵn. Thử lại ta thấy chỉ có 5 bộ sau

$\{2,2,2,2\};\{1,1,1,5\};\{1,1,3,3\};\ \{1,1,2,4\};\{1,2,2,3\}$.

Nên mỗi khả năng xảy ra có thể theo 1 trong 5 phương án sau :

* Phương án 1: khi $a,b,c,d \in \{1,1,1,5\}$.

+ Bước 1 : chọn 1 trong 4 vị trí để xếp số 5, suy ra có 4 cách.

+ Bước 2 : lấy 3 số 1 xếp vào 3 vị trí còn lại, suy ra có 1 cách.

Nên trong phương án này có : 4.1 = 4 (khả năng)

Có thể lập luận theo cách sau : hoán vị các số $\{1,1,1,5\}$, *trong đó số 1 lập lại 3 lần nên ta được* $\frac{4!}{3!}=4$ *(khả năng).*

* Phương án 2: khi $a,b,c,d \in \{1,1,2,4\}$

+ Bước 1 : chọn 2 trong 4 vị trí (có tính đến thứ tự) để xếp số 2 và số 4, suy ra có $A_4^2=12$ cách.

+ Bước 2 : Chọn 2 số 1 xếp vào 2 vị trí còn lại, suy ra có 1 cách.

Nên trong phương án này có : 12.1 = 12 (khả năng)

Có thể lập luận theo cách sau : hoán vị các số, trong đó số 1 lập lại 2 lần nên ta được $\frac{4!}{2!}=12$ *(khả năng).*

+ Phương án 3: khi $a,b,c,d \in \{1,2,2,3\}$. Lập luận tương tự như trên, ta được $A_4^2=\frac{4!}{2!}=12$ (khả năng).

+ Phương án 4: khi $a,b,c,d \in \{1,1,3,3\}$

+ Bước 1 : chọn 2 trong 4 vị trí (không tính đến thứ tự) để xếp 2 số 1, suy ra có $C_4^2=6$ cách.

+ Bước 2 : xếp hai số 3 vào 2 vị trí còn lại, suy ra có 1 cách.

Nên trong phương án này có : 6.1 = 6 (khả năng)

Có thể lập luận theo cách sau : hoán vị các số, trong đó số 1 lập lại 2 lần, số 3 lập lại 2 lần nên ta được $\frac{4!}{2!2!}=6$ *(khả năng).*

+ Phương án 5: khi $a,b,c,d \in \{2,2,2,2\}$ xếp 4 số 2 vào 4 vị trí nên có 1 cách

Có thể lập luận theo cách sau : hoán vị các số, trong đó số 2 lập lại 4 lần nên ta được $\frac{4!}{4!}=1$ *(khả năng).*

Vậy theo quy tắc cộng, ta có số khả năng là : $4+12+12+6+1=35$.

1.3. Bài tập áp dụng:

Bài 1. Xét dãy gồm 7 chữ số, mỗi chữ số được chọn từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 thoả mãn các điều kiện sau:

- Chữ số vị trí số 3 là số chẵn
- Chữ số cuối cùng không chia hết cho 5
- Các chữ số ở vị trí 4,5,6 đôi một khác nhau

Hỏi có thể lập được bao nhiêu dãy.

Bài 2. Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau từng đôi một trong đó có chữ số đầu tiên là số lẻ ?

Bài 3. Một lớp học có 20 học sinh, trong đó có hai cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 người đi dự Hội nghị sinh viên của trường sao cho trong 3 người đó có ít nhất một cán bộ lớp.

Bài 4. Một trường trung học có 8 thầy dạy toán, 5 thầy dạy vật lý, và ba thầy dạy hóa học. Chọn từ đó ra một đội có 4 thầy dự đại hội. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để có đủ ba bộ môn?

Bài 5. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được:

a) Bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau.

b) Bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau.

c) Bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt số 5.

Bài 6. Cho tập $E=\{0,1,2,3,4,5,7\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số của E. *(Dự bị A_1 – 2008).*

Bài 7. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau ? *(Dự bị D_2 – 2007).*

Bài 8. Từ 9 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 7 chữ số khác nhau ? *(Dự bị D_1 – 2003).*

Bài 9. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có 5 chữ số khác nhau trong đó có đúng hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ đó đứng cạnh nhau. *(Dự bị B_1 – 2006).*

Bài 10. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn lớn hơn 2007 mà mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau ? *(Dự bị A_1 – 2007).*

Bài 11. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có hai chữ số 1, 5? *(Dự bị B_1 – 2005).*

Bài 12. Xét một số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 và 4 chữ số còn lại là : 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế, nếu :

a) 5 chữ số 1 được xếp kề nhau ?

b) Các chữ số được sắp xếp tùy ý ?

Bài 13. Người ta viết các số có 6 chữ số bằng các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 như sau: Trong mỗi số được viết có một chữ số xuất hiện hai lần còn các chữ số còn lại xuất hiện một lần. Hỏi có bao nhiêu số như vậy ?

Bài 14. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

Bài 15. Từ các số 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 . Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu số có 3 chữ số không chia hết cho 3 mà các chữ số trong mỗi số là khác nhau.

Bài 16. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, chia hết cho 4 tạo bởi các chữ số 1; 2 ; 3 ; 4 trong hai trường hợp sau:

a) Các chữ số có thể trùng nhau.

b) Các chữ số khác nhau.

Bài 17. Số $a=2^3.5^4.7^2$ có bao nhiêu ước số.

Bài 18. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3? *(Dự bị A_1 – 2003).*

Bài 19. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số t nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng của các chữ số hàng chục, hàn trăm, hàng nghìn bằng 8 ? *(Dự bị A_1 – 2005).*

Bài 20. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗ số có 6 chữ số và thoả mãn điều kiện : Sáu chữ số của mỗi số là khác nhau v trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu nhỏ hơn tổng của ba chữ số cuối mộ đơn vị? *(Dự bị B_1 – 2003).*

Bài 21. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau nhỏ hơ 2158 ? *(Dự bị D_2 – 2004).*

Bài 22. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiê chẵn có 5 chữ số khác nhau và mỗi số lập được đều nhỏ hơn 25000? *(Dự bị D_2 – 2006).*

Bài 23. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 1 chữ số được chọn từ 8 chữ số trên, trong đó chữ số 6 có mặt đúng 3 lần, cá chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

Bài 24. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có chữ số khác nhau? Tính tổng của tất cả các số tự nhiên đó. *(Dự bị A_2 – 2006).*

Bài 25. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số mà các chữ số đều lớn hơn 4 v đôi một khác nhau. Hãy tính tổng của tất cả các số tự nhiên nói trên.

Bài 26. (*) Xét các biển số xe là dãy gồm 2 chữ cái đứng trước và 4 chữ số đứn sau. Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái *A, B, C, ..., Z*. Các chữ số được lấy t 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

a) Có bao nhiêu biển số xe trong đó có ít nhất một chữ cái khác chữ cái O v chữ số đôi một khác nhau?

b) Có bao nhiêu biển số xe có chữ cái khác nhau đồng thời có đúng 2 chữ số l và hai chữ số lẻ đó giống nhau ?

Bài 27. Trong một hộp có đựng 4 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Hỏi có bao nhiê cách lấy ra được 2 viên bi màu đỏ và 3 viên bi màu xanh, biết rằng mỗi lầ người ta luôn lấy ra một lúc 5 viên bi?

Bài 28. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người t chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn trong số viên bi lấy r không đủ cả 3 màu?

Bài 29. Từ một tổ gồm 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam cần chọn ra 6 em tron đó số học sinh nữ phải nhỏ hơn 4. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy. *(Dự bị B_2 – 2003).*

Bài 30. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi c bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉn miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ ? *(Khối B – 2005).*

Bài 31. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đ làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏ có bao nhiêu cách chọn như vậy ? *(Khối D – 2006).*

Bài 32. Một lớp học có 33 học sinh, trong đó có 7 nữ. Cần chia lớp học thành 3 tổ, tổ 1 có 10 học sinh, tổ 2 có 11 học sinh, tổ 3 có 12 học sinh sao cho trong mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chia như vậy? *(Dự bị D_1 – 2006).*

Bài 33. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2 ? *(Khối B – 2004).*

Bài 34. Một ghế dài có 5 chỗ ngồi dành cho 2 nữ sinh và 3 nam sinh. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi nếu:

a) Hai nữ sinh ngồi gần nhau và 3 nam sinh ngồi gần nhau.

b) Nam sinh không nhất thiết phải ngồi gần nhau.

Bài 35. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau mỗi dãy gồm 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường *A* và 6 học sinh trường *B* vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau:

a) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường.

b) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.

Bài 36. Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 nam sinh và 4 nữ sinh vào ngồi quanh một bàn tròn sao cho không có 2 nam 2 nữ ngồi cạnh nhau.

Bài 37. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt $(n \ge 2)$. Biết rằng có 2800 tam giác có các đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n. *(Dự bị B_1 – 2006)*

Bài 38. (*) Trên các cạnh *AB, BC, CD, DA* của hình vuông *ABCD* lần lượt lấy 1, 2, 3 và n điểm phân biệt khác *A, B, C, D*. Tìm n biết số tam giác có ba đỉnh lấy từ $n+6$ điểm đó là 439. *(Dự bị A_2 – 2007).*

Bài 39. (*) Xếp 3 viên bi đỏ có bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh giống nhau vào một dãy 7 ô trống. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách xếp khác nhau.

b) Có bao nhiêu cách xếp khác nhau sao cho 3 viên bi đỏ xếp cạnh nhau, 3 viên bi xanh xếp cạnh nhau.

Bài 40. Từ một nhóm gồm 15 học sinh thi khối A, 10 học sinh thi khối B, 5 học sinh thi khối C, chọn ra 15 học sinh sao cho có ít nhất 5 học sinh khối A và đúng 2 học sinh khối C. Tính số cách chọn.

2. Sử dụng các công thức hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để rút gọn biểu thức, giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

2.1. Phương pháp:

- Đặt điều kiện để phương trình, bất phương trình, hệ phương trình có nghĩa:

$$P_n \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \ge 1 \end{cases};\ A_n^k,\ C_n^k \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} n, k \in \mathbb{Z} \\ 0 \le k \le n \end{cases}$$

P_n có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \geq 1 \end{cases}$; A_n^k, C_n^k có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} n, k \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$.

- Dùng các công thức:

$$n! = 1.2.3.....(n-1).n \;;\; n! = (n-k)!(n-k+1)...(n-1).n$$

$$P_n = n! = A_n^n \;;\; A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \;;\; C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Biến đổi và rút gọn, đưa về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đại số đã biết cách giải. Chú ý khi lấy nghiệm ta cần chú ý đế điều kiện đã đặt để bài toán có nghĩa.

2.2. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Cho $k, n \in \mathbb{N}$; $3 \leq k \leq n$. Chứng minh:

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k.$$

Lời giải

Biến đổi vế trái : $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3}$

$= \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) + 2\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + \left(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}\right)$

$= C_{n+1}^k + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2} = \left(C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}\right) + \left(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}\right)$

$= C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} = C_{n+3}^k$ bằng vế phải,suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: $C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \cdots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1}$.

Từ đó suy ra đẳng thức sau: $C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + ... + C_{k+m-1}^{m-1} = C_{k+m}^{m-1}$

Lời giải

$$C_{k+1}^k = C_{k+2}^{k+1} - C_{k+1}^{k+1}$$

$$C_{k+2}^k = C_{k+3}^{k+1} - C_{k+2}^{k+1}$$

$$C_{k+3}^k = C_{k+4}^{k+1} - C_{k+3}^{k+1}$$

....

$$C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1} - C_{k+m-1}^{k+1}$$

Cộng lại ta được :

$$C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + C_{k+3}^k + \cdots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1} - C_{k+1}^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow C_{k+1}^{k+1} + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + C_{k+3}^k + \cdots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \cdots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1} \text{ (Vì } C_{k+1}^{k+1} = C_k^k = 1\text{)}.$$

do $C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow C_k^k = C_k^0$, $C_{k+1}^k = C_{k+1}^1$, $\cdots$

$\cdots C_{k+m-1}^k = C_{k+m-1}^{m-1}$, $C_{k+m}^{k+1} = C_{k+m}^{m-1}$

Nên $C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + ... + C_{k+m-1}^{m-1} = C_{k+m}^{m-1}$ (đpcm).

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết rằng

$$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149.$$

(*n* là số nguyên dương, A_n^k là số chỉnh hợp chập *k* của n phần tử và C_n^k là số tổ hợp chập *k* của *n* phần tử). *(Khối D – 2005)*.

Lời giải

Ta có : $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + C_{n+4}^2 + 2C_{n+3}^2 = 149$. Điều kiện : $(n \in N^*, n \geq 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2\frac{(n+2)!}{2!n!} + \frac{(n+4)!}{2!(n+2)!} + 2\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!} = 149$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)(n+2) + \frac{1}{2}(n+3)(n+4) + (n+2)(n+3) = 149$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -9 \; (loại) \\ n = 5 \end{array}\right.$$

Với n = 5, ta có: $M = \dfrac{A_6^4 + 3A_5^3}{(5+1)!} = \dfrac{\frac{6!}{2!} + 3.\frac{5!}{2!}}{6!} = \dfrac{3}{4}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình : $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \dfrac{24}{23}$

Lời giải

Đk : $x \geq 4$, $x \in \mathbb{N}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\dfrac{x!}{(x-4)!}}{\dfrac{(x+1)!}{(x-2)!} - \dfrac{x!}{(x-4)!4!}} = \frac{24}{23}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{(x-1)x(x+1) - \frac{1}{24}(x-3)(x-2)(x-1)x} = \frac{24}{23}$$

$$\Leftrightarrow \frac{24(x-3)(x-2)}{24(x+1) - (x-3)(x-2)} = \frac{24}{23} \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-2)}{24(x+1) - (x-3)(x-2)} = \frac{1}{23}$$

$$\Leftrightarrow 23(x-3)(x-2) = 24(x+1) - (x-3)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 24(x-3)(x-2) = 24(x+1) \Leftrightarrow (x-3)(x-2) = x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = 5$.

í dụ 5. Giải bất phương trình $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10$ (1).

Lời giải

Điều kiện : $x \geq 3$, $x \in \mathbb{Z}$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{(2x)!}{(2x-2)!}-\frac{x!}{(x-2)!}\le \frac{6}{x}\cdot\frac{x!}{3!(x-3)!}+10$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x-1).2x-(x-1).x\le \frac{6}{x}\cdot\frac{(x-2)(x-1)x}{6}+10$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-2x-2(x^2-x)\le 2(x^2-3x+2)+20$$

$$\Leftrightarrow 6x\le 24\Leftrightarrow x\le 4$$

So với điều kiện, ta được :

$$\begin{cases}3\le x\le 4\\ x\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=4\end{array}\right.$$ là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}A_x^2+C_y^3=22\\ A_y^3+C_x^2=66.\end{cases}$ *(Dự bị B_1 – 2007).*

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x,y\in\mathbb{N}\\ x\ge 2,\ y\ge 3\end{cases}$

Xét $\begin{cases}A_x^2+C_y^3=22\\ A_y^3+C_x^2=66\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2!C_x^2+C_y^3=22\\ 3!C_y^3+C_x^2=66\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}u=C_x^2\\ v=C_y^3\end{cases}$

Ta được hệ: $\begin{cases}2u+v=22\\ u+6v=66\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=6\\ v=10\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_x^2=6\\ C_y^3=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x!}{2!(x-2)!}=6\\ \dfrac{y!}{3!(y-3)!}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)x=12\\ (y-2)(y-1)y=60\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-12=0\\ y^3-3y^2+2y-60=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\vee x=-3\\ (y-5)(y^2+12y+12)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=5\end{cases}.$$

Ví dụ 7. Tìm số tự nhiên *n* thỏa mãn: $C_n^2C_n^{n-2}+2C_n^2C_n^3+C_n^3C_n^{n-3}=100$. *(Dự bị D_2 – 2003).*

Lời giải

Ta có: $C_n^2=C_n^{n-2}$ và $C_n^3=C_n^{n-3}$ (Do $C_n^k=C_n^{n-k}$).

Do đó : $C_n^2.C_n^{n-2}+2C_n^2C_n^3+C_n^3C_n^{n-3}=100$

$$\Leftrightarrow (C_n^2)^2+2C_n^2C_n^3+(C_n^3)^2=100\Leftrightarrow (C_n^2+C_n^3)^2=100$$

$$\Leftrightarrow C_n^2+C_n^3=10\Leftrightarrow C_{n+1}^3=10\Leftrightarrow\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}=10\Leftrightarrow (n-1).n.(n+1)=60$$

$$\Leftrightarrow n^3-n-60=0\Leftrightarrow (n-4)(n^2+4n+15)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=4\\ n^2+4n+15=0\end{array}\right.\Leftrightarrow n=4.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $n=4$.

Ví dụ 8. Tìm số nguyên *n*, $(n>1)$ thỏa mãn đẳng thức :

$$2P_n+6A_n^2-P_nA_n^2=12.$$

(P_n là số hoán vị của *n* phần tử và A_n^k là số chỉnh hợp chập *k* của *n* phần tử).

(Dự bị B_2 – 2005).

Lời giải

Ta có : $2P_n+6A_n^2-P_nA_n^2=12\ (n\in\mathbb{Z},\ n>1)$

$$\Leftrightarrow P_n(2-A_n^2)+6(A_n^2-2)=0\Leftrightarrow(2-A_n^2)(P_n-6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A_n^2=2\\ P_n=6\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{n!}{(n-2)!}=2\\ n!=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n(n-1)=2\\ n=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n^2-n-2=0\\ n=3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=2\\ n=3\end{array}\right.\ (\text{do } n>1)$$

Vậy giá trị cần tìm là : $n=2$ hay $n=3$.

Ví dụ 9. Cho tập hợp *A* gồm *n* phần tử $(n\ge 4)$. Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của *A* bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của *A*. Tìm $k\in\{1,2,...,n\}$ sao cho số tập con gồm *k* phần tử của *A* là lớn nhất.

Lời giải

Tập hợp A gồm n phần tử ($n\ge 4$). Số tập con gồm 4 phần tử của A là: C_n^4

Số tập con gồm 2 phần tử của A là : C_n^2

Theo giả thiết, ta có :

$$C_n^4=20C_n^2\Leftrightarrow\frac{n!}{4!(n-4)!}=20.\frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{24}=\frac{20}{2(n-3)(n-2)}\Leftrightarrow(n-2)(n-3)=240$$

$$\Leftrightarrow n^2-5n-234=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=18\\ n=-13\ (\text{loại})\end{array}\right.$$

C_{18}^k lớn nhất $\Leftrightarrow\begin{cases}C_{18}^k\ge C_{18}^{k-1}\\ C_{18}^k\ge C_{18}^{k+1}\end{cases}$ $(1\le k\le 17\,;\,k\in\mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{18!}{k!(18-k)!} \ge \dfrac{18!}{(k-1)!(19-k)!} \\ \dfrac{18!}{k!(18-k)!} \ge \dfrac{18!}{(k+1)!(17-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{k} \ge \dfrac{1}{19-k} \\ \dfrac{1}{18-k} \ge \dfrac{1}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \le \dfrac{19}{2} \\ k \ge \dfrac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{17}{2} \le k \le \dfrac{19}{2}$$

Mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 9$. Vậy giá trị cần tìm là: $k = 9$.

Cách khác : Ta có : $C_{18}^{k} < C_{18}^{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{18!}{k!(18-k)!} < \dfrac{18!}{(k+1)!(17-k)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{18-k} < \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow k < \frac{17}{2} \Leftrightarrow k \le 8 \quad (\text{do } k \in \mathbb{Z})$$

Tức là : $C_{18}^{0} < C_{18}^{1} < C_{18}^{2} < ... < C_{18}^{8} < C_{18}^{9}$

Tương tự : $C_{18}^{k} > C_{18}^{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{18!}{k!(18-k)!} > \dfrac{18!}{(k+1)!(17-k)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{18-k} > \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow k > \frac{17}{2} \Leftrightarrow k \ge 9 \quad (\text{do } k \in \mathbb{Z})$$

Tức là : $C_{18}^{9} > C_{18}^{10} > C_{18}^{11} > ... > C_{18}^{18}$.

Do đó : $C_{18}^{0} < C_{18}^{1} < C_{18}^{2} < ... < C_{18}^{8} < C_{18}^{9} > C_{18}^{10} > C_{18}^{11} > ... > C_{18}^{18}$.

Vậy giá trị cần tìm là: $k = 9$.

2.3. Bài tập áp dụng:

Bài 61. Cho *k* và *n* là hai số tự nhiên sao cho $4 \le k \le n$ chứng minh rằng :

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k.$$

Bài 62. Chứng minh đẳng thức : $2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$.

Bài 63. Chứng minh $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k} + \dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \dfrac{1}{C_n^k}$ (*k*, *n* là các số nguyên dương)

(Khối B – 2008).

Bài 64. (*) Cho *k*, *n* là các số nguyên thỏa mãn: $0 \le k \le n$. Chứng minh rằng :

$$C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$$

Bài 65. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $A = \dfrac{1 + C_7^4 + C_7^3 - C_8^4}{1 + C_{10}^5 + C_{10}^6 - C_{11}^6} + \dfrac{A_3^2}{P_2}$; b) $B = \dfrac{P_{n+2}}{A_n^k . P_{n-k}} + \dfrac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}$;

c) $C = C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + ... + k\dfrac{C_n^k}{C_n^{k-1}} + ... + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}}$.

Bài 66. Giải các phương trình sau đây:

a) $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \dfrac{7}{2}x$;

b) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$;

c) $\dfrac{1}{C_4^x} - \dfrac{1}{C_5^x} = \dfrac{1}{C_6^x}$;

d) $C_{x+1}^2 - A_x^2 - 4x^3 = \left(A_{2x}^1\right)^2$;

e) $P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$;

f) $x^2 C_{x-1}^{x-4} = A_4^2 C_{x-1}^3 - xC_{x-1}^{x-4}$;

g) $x^2 - C_4^x . x + C_3^2 . C_3^1 = 0$;

h) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$.

Bài 67. (*) Giải phương trình sau đây: $A_3^x . C_x^2 - 6C_x^2 - 3A_3^x + 18 = 0$.

Bài 68. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{A_{n+1}^1}{P_{n+2}} - \dfrac{143}{4(n-1)} < 0$;

b) $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \dfrac{5}{4}A_{n-2}^3 < 0$;

c) $A_n^3 + 2C_n^{n-2} \le 9n$. *(Dự bị 2 - 2002).*

e) $\dfrac{P_{n+5}}{(n-k)!} \le 60A_{n+3}^{k+2}$;

f) $\dfrac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4} < \dfrac{1}{14P_3}$;

d) (*) Tìm $k \in \{0,1,2,..........,2009\}$ sao cho C_{2009}^k đạt giá trị lớn nhất

Bài 69. Giải các hệ phương trình sau đây:

a) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} A_{5x}^{y-3} : A_{5x}^{y-2} = 1:7 \\ C_{5x}^{y-2} : C_{5x}^{y-3} = 7:4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = 1:3 \\ C_y^x : A_y^x = 1:24 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \dfrac{A_y^x}{P_{x+1}} + C_y^{y-x} = \dfrac{49}{2} \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}$;

f) $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6:5:2$.

g) Tìm các số nguyên dương m, n thỏa mãn: $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = 5:5:3$.

* * *

§2. NHỊ THỨC NEWTON

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nhị thức Newton :

1.1. Công thức nhị thức Newton :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

1.2. Các tính chất của công thức :

- Tổng trên có tất cả $n+1$ số hạng.
- Số hạng tổng quát có dạng : $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

- Khi cho $a=b=1$, ta có : $C_n^0+C_n^1+.......+C_n^n=2^n$.
- Khi cho $a=1;\ b=-1$, ta được : $C_n^0-C_n^1+.......+(-1)^nC_n^n=0$.
- $(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+\cdots\cdots+C_n^n$.
- $(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+\cdots+(-1)^nC_n^nx^n$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

1. Tính tổng hữu hạn và chứng minh các đẳng thức, bất đẳng thức:

1.1. Phương pháp:

- Vận dụng công thức : $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k=C_n^k$ và $C_n^k=C_n^{n-k}$.
- Áp dụng khai triển của nhị thức Newton, so sánh các hệ số một cách thích hợp để dẫn đến điều cần chứng minh.
- Việc tính các tổng hữu hạn cần lưu ý
    - ➢ Ta khai triển $(ax+b)^n$ rồi chọn a,b,x một cách thích hợp.
    - ➢ Nếu tổng có chỉ số không đầy đủ, ta đặt tổng bổ sung, tính tổng hoặc hiệu các tổng đó .

1.2. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Chứng minh: $C_{2n}^1+C_{2n}^3+......+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+.........+C_{2n}^{2n}=2^{2n-1}$

Lời giải

Ta có : $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+C_{2n}^3x^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

Khi $x=-1\Rightarrow 0=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+\cdots-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$ (1)

$$\Rightarrow C_{2n}^1+C_{2n}^3+......+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+.........+C_{2n}^{2n}$$

Khi $x=1\Rightarrow 2^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$ (2)

Cộng (1) và (2), ta được : $2\left(C_{2n}^0+C_{2n}^2+.........+C_{2n}^{2n}\right)=2^{2n}$

$$\Leftrightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^2+.........+C_{2n}^{2n}=2^{2n-1}$$

Vậy ta có : $C_{2n}^1+C_{2n}^3+......+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+.........+C_{2n}^{2n}=2^{2n-1}$ (đpcm).

Ví dụ 2. Chứng minh $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$

Lời giải

Xét $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+\cdots+C_{2n}^nx^n+\cdots+C_{2n}^{2n}x^{2n}$,suy ra hệ số của x^n là C_{2n}^n

Mà $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$

$$=\left(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n\right)\left(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n\right)$$

Khi nhân hai đa thức trên ta thấy số hạng chứa x^n có dạng :

$$\left(C_n^0.C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+\cdots+C_n^nC_n^0\right)x^n=\left[\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2\right]x^n.$$

Hai đa thức trên đồng nhất nên hệ số của số hạng chứa x^n phải bằng nhau, tức là:

$$\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n\geq 2$, ta đều có :

$$C_n^0.C_n^1.C_n^2....C_n^{n-1}.C_n^n\leq\left(\frac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1}$$

Lời giải

Do $C_n^0=C_n^n=1\Rightarrow C_n^0.C_n^1.C_n^2....C_n^{n-1}.C_n^n=C_n^1.C_n^2....C_n^{n-1}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy đối với $n-1$ số, ta có:

$$C_n^1.C_n^2....C_n^{n-1}\leq\left(\frac{C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$$

Mà $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n\Rightarrow C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}=2^n-2$

Vậy, ta được : $C_n^1.C_n^2....C_n^{n-1}\leq\left(\dfrac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1}$

$$\Leftrightarrow C_n^0.C_n^1.C_n^2....C_n^{n-1}.C_n^n\leq\left(\frac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 4. Rút gọn các tổng sau :

a) $S_1=C_{2009}^0 4^{2010}.5^1+C_{2009}^1 4^{2009}.5^2+C_{2009}^2 4^{2008}.5^3+\cdots+C_{2009}^{2009}4^1.5^{2010}$.

b) $S_2=C_{2009}^0 2^{2009}-C_{2009}^1 2^{2008}.3+C_{2009}^2 2^{2007}.3^2+\cdots-C_{2009}^{2009}.3^{2009}$.

Lời giải

a) $S_1=C_{2009}^0 4^{2010}.5^1+C_{2009}^1 4^{2009}.5^2+C_{2009}^2 4^{2008}.5^3+\cdots+C_{2009}^{2009}4^1.5^{2010}$

$$=4.5\left(C_{2009}^0 4^{2009}.5^0+C_{2009}^1 4^{2008}.5^1+C_{2009}^2 4^{2007}.5^2+\cdots+C_{2009}^{2009}4^0.5^{2009}\right)$$

$$=20(4+5)^{2009}=20.9^{2009}.$$

b) $S_2=C_{2009}^0 2^{2009}-C_{2009}^1 2^{2008}.3+C_{2009}^2 2^{2007}.3^2+\cdots-C_{2009}^{2009}.3^{2009}$

$$=(2-3)^{2009}=(-1)^{2009}=-1$$

Ví dụ 5. Rút gọn các tổng sau:

a) $S_3=C_{2009}^0 2^{2009}+C_{2009}^2 2^{2007}.3^2+\cdots+C_{2009}^{2008}2.3^{2008}$.

b) $S_4=C_{2009}^0+C_{2009}^1+C_{2009}^2+\cdots+C_{2009}^{1004}$.

Lời giải

a) $S_3=C_{2009}^0 2^{2009}+C_{2009}^2 2^{2007}.3^2+\cdots+C_{2009}^{2008}2.3^{2008}$

$(2-3)^{2009}=C_{2009}^0 2^{2009}-C_{2009}^1 2^{2008}.3+C_{2009}^2 2^{2007}.3^2+\cdots+C_{2009}^{2008}2.3^{2008}-C_{2009}^{2009}.3^{2009}$

$(2+3)^{2009}=C_{2009}^0 2^{2009}+C_{2009}^1 2^{2008}.3+C_{2009}^2 2^{2007}.3^2+\cdots+C_{2009}^{2008}2.3^{2008}+C_{2009}^{2009}.3^{2009}$

$\Rightarrow 5^{2009}-1=2\left(C_{2009}^0 3^{2009}+C_{2009}^2 2^{2007}.3^2+\cdots+C_{2009}^{2008}2.3^{2008}\right)$

Do đó : $S_3=C_{2009}^0 2^{2009}+C_{2009}^2 2^{2007}.3^2+\cdots+C_{2009}^{2008}2.3^{2008}=\dfrac{5^{2009}-1}{2}$.

b) $S_4 = C_{2009}^0 + C_{2009}^1 + C_{2009}^2 + \cdots + C_{2009}^{1004}$

Ta có : $(1+1)^{2009} = C_{2009}^0 + C_{2009}^1 + C_{2009}^2 + \cdots + C_{2009}^{1004} + C_{2009}^{1005} + \cdots + C_{2009}^{2008} + C_{2009}^{2009}$

Mà $C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow C_{2009}^{2009} = C_{2009}^0, C_{2009}^{2008} = C_{2009}^1, \cdots, C_{2009}^{1005} = C_{2009}^{1004}$

$$\Rightarrow 2^{2009} = 2\left(C_{2009}^0 + C_{2009}^1 + C_{2009}^2 + \cdots + C_{2009}^{1004}\right)$$

Vậy $S_4 = C_{2009}^0 + C_{2009}^1 + C_{2009}^2 + \cdots + C_{2009}^{1004} = \dfrac{2^{2009}}{2} = 2^{2008}$.

2. Tìm hệ số của một số hạng trong khai triển nhị thức Newton

2.1. Phương pháp:

2.1.1. Tìm hệ số của x^t khi khai triển $P(x) = \left(ax^\alpha + bx^\beta\right)^n$, trong đó $\alpha;\beta \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ta thực hiện theo các bước sau:

- Tìm số hạng tổng quát khi khai triển Newton của biểu thức
$$T_{k+1} = C_n^k \left(ax^\alpha\right)^{n-k}\left(bx^\beta\right)^k = C_n^k a^{n-k}.b^k.x^{\alpha n - \alpha k + \beta k}$$
- Cho $\alpha n - \alpha k + \beta k = t$, tìm được k.
- Suy ra hệ số của x^t là : $C_n^k a^{n-k} b^k$.

2.1.2. Tìm hệ số của x^t khi khai triển $P(x) = \left(a + bx^\alpha + cx^\beta\right)^n$, trong đó $\alpha;\beta \in \mathbb{Q}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Ta thực hiện theo các bước sau :

- Viết $P(x) = \left(a + bx^\alpha + cx^\beta\right)^n$ thành dạng :
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.a^{n-k}.\left(bx^\alpha + cx^\beta\right)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.a^{n-k}.\sum_{m=0}^{k} C_k^m \left(bx^\alpha\right)^{k-m}\left(cx^\beta\right)^m$$
Từ đó khi khai triển $P(x)$ ta được các số hạng có dạng :
$$C_n^k.C_k^m.a^{n-k}.b^{k-m}.c^m.x^{\alpha(k-m)+\beta m}.$$
- Nên số hạng chứa x^t phải thỏa $\begin{cases} \alpha(k-m) + \beta m = t \\ 0 \le m \le k \le n, (n,k,m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$
- Từ đó tìm được n, k, m và suy ra được hệ số của số hạng chứa x^t.

2.1.3. Tìm hệ số lớn nhất khi khai triển Newton một nhị thức thành đa thức.

- ***Cách 1:***
  - Xác định các hệ số a_k, a_{k+1} của x^k, x^{k+1}.
  - Giả sử $a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow k \le m$, suy ra $a_0 < a_1 < \cdots < a_m$
    $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow k \ge m+1$, suy ra $a_m > a_{m+1} > \cdots > a_n$
  - Suy ra hệ số lớn nhất cần tìm là: a_m.
- ***Cách 2:***
  - Tìm số hạng tổng quát.
  - Xác định các hệ số a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, $(k = 1, 2, 3, \cdots, n)$.
  - Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} a_k \ge a_{k-1} \\ a_k \ge a_{k+1} \end{cases}$ tìm k suy ra kết quả.

2.2. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Tìm số hạng thứ 12 trong khai triển của : $P(x) = (2-3x)^{15}$

Lời giải

Ta có : $T_{12} = C_{15}^{11}.2^4(-3x)^{11} = -2^4 \cdot 3^{11} \cdot C_{15}^{11} \cdot x^{11}$.

Ví dụ 2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 khi khai triển biểu thức :
$$P(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)^{12}, (x \ne 0)$$

Lời giải

Ta có : Số hạng tổng quát khi khai triển nhị thức trên là:
$$T_{k+1} = C_{12}^k \left(x^2\right)^{12-k}.\left(x^{-4}\right)^k = C_{12}^k.x^{24-6k}$$
T_{k+1} chứa x^6 khi : $24 - 6k = 6 \Leftrightarrow k = 3$. Vậy hệ số cần tìm là : C_{12}^3.

Ví dụ 3. Tìm số hạng không chứa *x* khi khai triển biểu thức:
$$P(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3}\right)^{30}.(x \ne 0)$$

Lời giải

Ta có : Số hạng tổng quát khi khai triển nhị thức trên là :
$$T_{k+1} = C_{30}^k\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{30-k}.\left(x^{-3}\right)^k = C_{30}^k.x^{10-\frac{10}{3}k}$$
T_{k+1} không chứa *x* khi : $10 - \dfrac{10}{3}k = 0 \Leftrightarrow k = 3$

Vậy số hạng không chứa *x* là : $T_4 = C_{30}^3$.

Ví dụ 4. Tìm hệ số của số hạng chứa x^2 khi khai triển: $P(x) = \left(1 + 2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^9$

Lời giải

Cách 1 : $P(x) = \left(1 + 2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^9 = \left[1 + \left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)\right]^9$

$$= C_9^0 + C_9^1\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + C_9^2\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^2 + C_9^3\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^3 + C_9^4\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^4$$
$$+ C_9^5\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^5 + C_9^6\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6 + C_9^7\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^7$$
$$+ C_9^8\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^8 + C_9^9\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^9$$

Trong các số hạng của tổng trên, ta thấy chỉ có 3 số hạng có chứa x^2 là:

$$C_9^2\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^2=C_9^2.2^2x^2-C_9^2 2.2^1.\frac{1}{x}+C_9^2\frac{1}{x^4}$$

$$C_9^5\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^5=C_9^0.C_5^0 2^5.x^5-C_9^5.C_5^1 2^4.x^2+C_9^5.C_5^2 2^3.x^{-1}+\cdots\cdots$$

$$C_9^8\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^8=C_9^8C_8^0(2x)^8-C_9^8C_8^1 2^7.x^5+C_9^8C_8^2 2^6.x^2+\cdots\cdots$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^2 là : $C_9^2.C_2^0.2^2-C_9^5.C_5^1.2^4+C_9^8.C_8^2.2^6$.

Cách 2 : Ta có : $P(x)=\left(1+2x-\frac{1}{x^2}\right)^9=\left[1+\left(2x-x^{-2}\right)\right]^9$

Khi khai triển $P(x)$ ta có số hạng tổng quát là:

$$T_{k+1}=C_9^k\left(2x-x^{-2}\right)^k \text{ với } 0\le k\le 9,(k\in\mathbb{N})$$

Khi khai triển $\left(2x-x^{-2}\right)^k$ ta có số hạng tổng quát là:

$$T_{m+1}=C_k^m(2x)^{k-m}\left(-x^{-2}\right)^m=C_k^m.2^{k-m}(-1)^m.x^{k-3m}$$

Vậy khi khai triển $P(x)$ ta được một tổng gồm các số hạng có dạng :

$$C_9^k.C_k^m(-1)^m.2^{k-m}.x^{k-3m} \text{ với } 0\le m\le k\le 9\,;\,(k,m\in\mathbb{N})$$

Số hạng chứa x^2 ứng với $k-3m=2$ bằng cách thử trực tiếp với $0\le m\le k\le 9\,;\,(k,m\in\mathbb{N})$, ta được các cặp *k*, *m* sau thỏa :

$m=0$ và $k=2$; $m=1$ và $k=5$; $m=2$ và $k=8$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^2 là : $C_9^2.C_2^0.2^2-C_9^5.C_5^1.2^4+C_9^8.C_8^2.2^6$.

Ví dụ 5. Đa thức : $P(x)=(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\cdots+20(1+x)^{20}$ được viết dưới dạng $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x^{20}$. Tìm a_{15} ?

Lời giải

Hệ số của x^{15} trong số hạng : $15(1+x)^{15}$ là $15C_{15}^{15}$.

Hệ số của x^{15} trong số hạng : $16(1+x)^{16}$ là $16C_{16}^{15}$.

Hệ số của x^{15} trong số hạng : $17(1+x)^{17}$ là $17C_{17}^{15}$.

Hệ số của x^{15} trong số hạng : $18(1+x)^{18}$ là $18C_{18}^{15}$.

Hệ số của x^{15} trong số hạng : $19(1+x)^{19}$ là $19C_{19}^{15}$.

Hệ số của x^{15} trong số hạng : $20(1+x)^{20}$ là $20C_{20}^{15}$.

Vậy $a_{15}=15C_{15}^{15}+16C_{16}^{15}+17C_{17}^{15}+18C_{18}^{15}+19C_{19}^{15}+20C_{20}^{15}=400995$.

Ví dụ 6. Trong khai triển của $P(x)=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức :

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9+a_{10}x^{10}\quad(a_k\in\mathbb{R})$$

Hãy tìm hệ số a_k lớn nhất $(0\le k\le 10)$.

Lời giải

Số hạng tổng quát khi khai triển $P(x)$ là:

$$T_{k+1}=C_{10}^k.\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}.\left(\frac{2}{3}x\right)^k=C_{10}^k\frac{1}{3^{10}}.2^k.x^k,\ (0\le k\le 10)$$

Vậy hệ số $a_k=C_{10}^k.\frac{1}{3^{10}}.2^k$, $a_{k+1}=C_{10}^{k+1}.\frac{1}{3^{10}}.2^{k+1}$

- ***Cách 1:***

$$a_k<a_{k+1}\Leftrightarrow C_{10}^k.\frac{1}{3^{10}}.2^k<C_{10}^{k+1}.\frac{1}{3^{10}}.2^{k+1}\Leftrightarrow C_{10}^k<2C_{10}^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{10!}{k!(10-k)!}<\frac{2.10!}{(k+1)!(9-k)!}\Leftrightarrow k<\frac{19}{3}\Rightarrow k\le 6.$$

$$\Rightarrow a_0<a_1<\cdots<a_6<a_7$$

$$a_k>a_{k+1}\Leftrightarrow k>\frac{19}{3}\Rightarrow k\ge 7\Rightarrow a_7>a_8>\cdots>a_{10}$$

Vậy hệ số lớn nhất là : $a_7=\frac{C_{10}^7.2^7}{3^{10}}$.

- ***Cách 2 :***

$$a_k=C_{10}^k.\frac{1}{3^{10}}.2^k \text{ lớn nhất }\begin{cases}a_k\ge a_{k-1}\\a_k\ge a_{k+1}\end{cases};\ (1\le k\le 9)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}C_{10}^k.\frac{1}{3^{10}}.2^k\ge C_{10}^{k-1}.\frac{1}{3^{10}}.2^{k-1}\\C_{10}^k.\frac{1}{3^{10}}.2^k\ge C_{10}^{k+1}.\frac{1}{3^{10}}.2^{k+1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}C_{10}^k.2\ge C_{10}^{k-1}\\C_{10}^k\ge C_{10}^{k+1}.2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2.10!}{k!(10-k)!}\ge\frac{10!}{(k-1)!(11-k)!}\\\frac{10!}{k!(10-k)!}\ge\frac{2.10!}{(k+1)!(9-k)!}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{k}\ge\frac{1}{11-k}\\\frac{1}{10-k}\ge\frac{2}{k+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\le\frac{22}{3}\\k\ge\frac{19}{3}\end{cases}\Leftrightarrow k=7.$$

Vậy hệ số lớn nhất là: $a_7=\frac{C_{10}^7.2^7}{3^{10}}$.

Ví dụ 7. Biết rằng trong khai triển nhị thức Newton của $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ tổng các hệ số của hai số hạng đầu bằng 24. Tính tổng các hệ số của các số hạng chứa x^k, $(k>0)$ và chứng minh rằng tổng này là một số chính phương.

(Dự bị D₁-2004).

Lời giải

Khi khai triển $P(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$, ta có số hạng tổng quát là :

$$T_{k+1}=C_n^k x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_n^k.x^{n-2k}$$

Tổng của các hệ số của hai số hạng đầu tiên bằng 24

$$\Leftrightarrow C_n^0+C_n^1=24\Leftrightarrow 1+n=24\Leftrightarrow n=23$$

Số hạng chứa *x* mũ nguyên dương thỏa:

$$n-2k>0\Leftrightarrow 23-2k>0\Leftrightarrow k<\frac{23}{2}\Rightarrow k\in\{0,1,2,...,11\}$$

$\Rightarrow$ Có 12 số hạng chứa *x* mũ nguyên dương

Tổng 12 hệ số đó là : $S=C_{23}^0+C_{23}^1+C_{23}^2+\cdots+C_{23}^9+C_{23}^{10}+C_{23}^{11}$

Ta có : $(1+1)^{23}=C_{23}^0+C_{23}^1+C_{23}^2+\cdots+C_{23}^{22}+C_{23}^{23}$

ta được : $2^{23}=C_{23}^0+C_{23}^1+C_{23}^2+......+C_{23}^{22}+C_{23}^{23}$

Mặt khác: $C_{23}^0=C_{23}^{23}$,$C_{23}^1=C_{23}^{22}$,$C_{23}^2=C_{23}^{21}$, ... (vì $C_n^k=C_n^{n-k}$).

Do đó: $2^{23}=2\left(C_{23}^0+C_{23}^1+C_{23}^2+....+C_{23}^{11}\right)=2S$

$$\Leftrightarrow S=\frac{2^{23}}{2}=2^{22}\Rightarrow\sqrt{S}=2^{11}$$. Vậy S là số chính phương.

Ví dụ 8. Trong khai triển $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ .Tìm hệ số của số hạng chứa *a* và *b* có số mũ bằng nhau ?

Lời giải

Số hạng tổng quát khi khai triển nhị thức trên là:

$$T_{k+1}=C_{21}^k\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^{21-k}\left(b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^k=C_{21}^k a^{7-\frac{1}{2}k}b^{-\frac{7}{2}+\frac{2}{3}k}$$

Số hạng chứa *a* và *b* có số mũ bằng nhau

$$\Leftrightarrow 7-\frac{1}{2}k=-\frac{7}{2}+\frac{2}{3}k\Leftrightarrow 7k=63\Leftrightarrow k=9.$$

Vậy hệ số cần tìm là : C_{21}^9.

Ví dụ 9. Cho $P(x)=(2010x-2009)^{2010}$. Khai triển đa thức trên thành dạng :

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2010}x^{2010}$$

Tính tổng : $S=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2010}$

Lời giải

Dễ thấy $P(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2010}=S$.

Mà $P(1)=(2010-2009)^{2010}=1$, vậy $S=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2010}=1$.

2.3. Bài tập áp dụng:

Bài 1. (*) Ba số tự nhiên *k, m, n* thỏa điều kiện : $0\le m\le k\le n$. Chứng minh:

$$C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+\cdots+C_m^mC_n^{k-m}=C_{m+n}^k.$$

Bài 2. Tính các tổng sau:

a) $S_1=C_6^1+C_6^2+...+C_6^5$.

b) $S_2=2^{2n}C_{2n}^0+2^{2n-2}C_{2n}^2+2^{2n-4}C_{2n}^4+...+C_{2n}^{2n}$.

c) $S_3=C_{2009}^0 2^{2008}-C_{2009}^1 2^{2007}+C_{2009}^2 2^{2006}-\cdots+C_{2009}^{2008}-\frac{1}{2}C_{2009}^{2009}$.

d) $S_4=C_{2010}^{1006}-C_{2010}^{1007}+C_{2010}^{1008}-C_{2010}^{1009}+\cdots+C_{2010}^{2010}$.

e) $S_5=C_{2009}^0+3^2C_{2009}^2+\cdots+3^{2008}C_{2009}^{2008}$

Bài 3. Chứng minh rằng : $3^n\left[C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{3^2}C_n^2-\cdots+(-1)^n\frac{1}{3^n}C_n^n\right]=2^n$.

Bài 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của các nhị thức:

a) $\left(x+\frac{1}{x^4}\right)^{10}$; b) $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^5$; c) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$.

Bài 5. Khai triển và rút gọn các đơn thức đồng dạng đa thức:

$$P(x)=(1+x)^9+(1+x)^{10}+...+(1+x)^{14}$$

ta sẽ được đa thức: $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{14}x^{14}$. Hãy xác định hệ số a_9 ?

Bài 6. a) Tìm số hạng của khai triển $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^9$ là một số nguyên;

b) Tìm số hạng hữu tỉ của khai triển $(\sqrt{3}-\sqrt{15})^6$;

c) Xác định các số hạng hữu tỉ của khai triển $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7})^{36}$;

d) Có bao nhiêu hạng tử nguyên của khai triển $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$.

Bài 7. Cho biết tổng của 3 hệ số của 3 số hạng đầu tiên trong khai triển $\left(x^2-\frac{2}{3}\right)^n$ là $\frac{13312}{6561}$. Tìm hạng tử của khai triển chứa x^4.

Bài 8. Gọi $a_1, a_2, \cdots, a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau:

$$(x+1)^{10}(x+2) = x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + \cdots + a_{11}.$$

Hãy tính hệ số a_5. *(Dự bị D_2 – 2002).*

Bài 9. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của

$$P(x) = \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n.$$ Biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$.

(Khối A – 2003).

Bài 10. Tìm các số hạng không chứa *x* trong khai triển nhị thức Newton của:

$$P(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7.$$ *(Khối D - 2004).*

Bài 11. (*) Tìm hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, trong đó *n* là số nguyên dương thoả mãn: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

(Dự bị A_1 – 2005).

Bài 12. (*) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{37} trong khai triển nhị thức Newton của

$$P(x) = \left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n.$$ Biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

(Khối A – 2006).

Bài 13. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển của nhị thức Newton của

$(1+3x)^{2n}$, biết rằng $A_n^3 + 2A_n^2 = 100$. *(Dự bị A_2 – 2008).*

Bài 14. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của :

$$P(x) = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$$ *(Khối D – 2007).*

Bài 15. (*) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của :

$$P(x) = \left[1 + x^2(1-x)\right]^8$$ *(Khối A - 2004).*

Bài 16. (*) Tìm hệ số của x^3 trong khai triển thành đa thức của biểu thức :

$$P(x) = (2x^2 + 3x - 1)^9.$$

Bài 17. (*) Tìm hệ số của số hạng chứa $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ khi khai triển đa thức :

$$P(x) = \left(1 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^7.$$

Bài 18. (*) Cho *n* là số nguyên dương thoả mãn điều kiện : $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 55$.

Hãy tìm số hạng là số nguyên trong khai triển nhị thức : $\left(\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{5}\right)^n$.

Bài 19. Giả sử $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Biết rằng :

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 729.$$

Tìm *n* và số lớn nhất trong các số: $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$. *(Dự bị B_1 – 2004).*

Bài 20. (*) Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ và các hệ số $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các số : $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$. *(Khối A – 2008).*

Bài 21. Biết rằng $(2+x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + .. + a_kx^k + .. + a_{100}x^{100}$. Chứng minh rằng $a_2 < a_3$. Với giá trị nào của k $(0 \le k \le 99)$ thì $a_k < a_{k+1}$?

(Dự bị B_2 – 2004).

Bài 22. (*) Với *n* là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} trong khai triển thành đa thức của: $P(x) = (x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm *n* để $a_{3n-3} = 26n$. *(Khối D – 2003).*

Bài 23. (*) Giả sử *n* là số nguyên dương và

$$(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots + a_nx^n$$

Biết rằng tồn tại số *k* nguyên $(1 \le k \le n-1)$ sao cho $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$, hãy tính *n*.

(Dự bị 4 - 2002).

Bài 24. Cho khai triển nhị thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^n = C_0^n\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1} + ...$$

$$.......+ C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$$

(n là số nguyên dương)

Biết rằng trong khai triển đó : $C_n^3 = 5.C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20*n*. Tìm *n* và *x*.

(Khối A - 2002).

Bài 25. Cho đa giác đều $A_1A_2......A_{2n}$ $(n \ge 2; n \in \mathbb{Z})$ nội tiếp đường tròn *(O)*. Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điể $A_1, A_2;......;A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2*n* điểm $A_1, A_2;......;A_{2n}$. Tìm *n* ?

(Khối B - 3

2002).

§3. XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biến cố và xác suất của biến cố:

1.1. Một phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là ***phép thử***), là một thí nghiệm (hay một hành động) mà:

- Nó có thể lặp đi lặp lại nhiều lần trong các điều kiện giống nhau.
- Kết quả của nó không dự đoán trước được.
- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó. Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.

1.2. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là **không gian mẫu** của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô-mê-ga).

1.3. ***Biến cố*** A liên quan tới phép thử T được mô tả bởi tập con Ω_A nào đó của không gian mẫu Ω của T. Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của T thuộc tập Ω_A. Mỗi phần tử của Ω_A được gọi là một ***kết quả thuận lợi*** cho biến cố A.

- Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T. Kí hiệu Ω
- Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện T. Kí hiệu $\varnothing$

1.4. ***Xác suất của biến cố:***

1.4.1. Định nghĩa cổ điển của xác suất : Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hợp hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan đến phép thử T và Ω_A là tập mô tả A thì xác suất của A được xác định bởi công thức:

$$P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$$

Trong đó, $|\Omega_A|$ và $|\Omega|$ lần lượt là số phần tử của tập Ω_A và Ω.

1.4.2. ***Chú ý:***

- $0\le P(A)\le 1$
- $P(\Omega)=1$; $P(\varnothing)=0$

2. Các quy tắc tính xác suất:

2.1. ***Biến cố hợp:*** Cho k biến cố $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_k$. Biến cố "có ít nhất một trong các biến cố $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_k$ xảy ra" được gọi là hợp của k biến cố đó. Kí hiệu: $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_k$.

2.2. ***Biến cố xung khắc*** : Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra, A và B xung khắc $\Leftrightarrow \Omega_A\cap\Omega_B=\varnothing$.

2.3. ***Quy tắc cộng xác suất:***

Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Nếu cho *k* biến cố $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_k$ đôi một xung khắc thì

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots+P(A_k)$$

2.4. ***Biến cố đối:*** Cho A là một biến cố.Khi đó biến cố "không xảy ra A", được gọi là biến cố đối của A. Kí hiệu $\overline{A}$

Chú ý:

- $\Omega_{\overline{A}}=\Omega\setminus\Omega_A$.
- $P(\overline{A})=1-P(A)$

2.5. ***Biến cố giao:*** Cho *k* biến cố $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_k$. Biến cố "Tất cả k biến cố $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_k$ đều xảy ra" được gọi là giao của k biến cố đó. Kí hiệu: $A_1A_2A_3A_k$.

2.6. ***Biến cố độc lập*** : Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất của biến cố kia.

2.7. ***Quy tắc nhân xác suất*** :

Nếu hai biến cố A và B độc lập thì : $P(AB)=P(A).P(B)$

Nếu cho k biến cố $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_k$ độc lập với nhau thì

$$P(A_1A_2A_3A_k)=P(A_1).P(A_2).P(A_3).\cdots.P(A_k)$$

3. Biến ngẫu nhiên rời rạc:

3.1. ***Định nghĩa:*** Đại lượng X được gọi là biến ngẫu nhiên rời rạc nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hữu hạn nào đó và giá trị ấy là ngẫu nhiên không dự đoán trước được.

3.2. ***Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc:*** Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị thuộc tập $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. Gọi p_k là xác suất để X nhận giá trị x_k.

Tức là $p_k=P(X=x_k)$, $k=1,2,\cdots,n$

Lúc đó bảng phân bố xác suất củabiến ngẫu nhiên rời rạc X là :

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Chú ý : $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

3.3. ***Kì vọng:***

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. ***Kì vọng*** của X, kí hiệu $E(X)$ là một số được tính theo công thức:

$$E(X)=x_1.p_1+x_2.p_2+\cdots+x_n.p_n=\sum_{i=1}^{n}x_i.p_i$$

$E(X)$ là một số cho ta ý niệm về độ lớn trung bình của X. Vì thế kì vọng của X còn được gọi là giá trị trung bình của X.

3.4. ***Phương sai*** :

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

Phương sai của X , kí hiệu $V(X)$ là một số được tính theo công thức:

$$V(X)=x_1^2.p_1+x_2^2.p_2+\cdots+x_n^2.p_n-\left[E(X)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2.p_i-\left[E(X)\right]^2$$

3.5. Độ lệch chuẩn : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

1. Tính xác suất của một biến cố theo định nghĩa cổ điển:

1.1. ***Phương pháp:*** Một bài toán tính xác suất của một biến cố theo định nghĩ cổ điển bao gồm ba bước:

- Tính số phần tử của không gian mẫu $|\Omega|$.
- Tính số phần tử (số kết quả thuận lợi) của tập hợp mô tả biến cố đan xét $|\Omega_A|$.
- Áp dụng công thức $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$.

➢ Việc tính xác suất của một biến cố theo định nghĩa cổ điển đượ quy về việc đếm số phần tử của không gian mẫu Ω và đếm số phần t của tập con mô tả biến cố đang xét Ω_A. Do đó nó có liên quan mậ thiết với bài toán tổ hợp "đếm số phần tử của một tập hợp hữu hạn".

1.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Gieo một con xúc xắc hai lần.
a) Hãy mô tả không gian mẫu.
b) Hãy xác định các biến cố sau.
A : « Lần đầu xuất hiện điểm 5 » ; *B* : « Tổng điểm của hai lần là 4 »
c) Hãy tính xác suất của hai biến cố trên.

Lời giải

a) Phép thử *T* "Gieo một con xúc xắc hai lần",suy ra. không gian mẫu là :

$\Omega=\{(x,y)|1\le x,y\le 6\}$, nên không gian mẫu có kích thức: $|\Omega|=6.6=36$.

b) *A* : « Lần đầu xuất hiện điểm 5 » nên tập hợp các kết quả thuận lợi của biến cố *A* là : $\Omega_A=\{(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6)\}\Rightarrow|\Omega_A|=6$.

B : « Tổng điểm của hai lần là 4 » nên tập hợp các kết quả thuận lợi của biến cố *B* là: $\Omega_B=\{(1,3);(3,1);(2,2)\}\Rightarrow|\Omega_B|=3$.

c) Vậy xác suất của biến cố *A* là : $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

Xác suất của biến cố *B* là : $P(B)=\dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$.

Ví dụ 2. Gieo đồng thời hai con xúc xắc. Tính xác suất để
a) Tổng số nốt xuất hiện trên hai con là 7.
b) Số nốt xuất hiện trên hai con có hiệu là 2.

Lời giải

Phép thử *T* là "Gieo đồng thời hai con xúc xắc", suy ra không gian mẫu có kích thức: $|\Omega|=36$

a) Biến cố *A*: "Tổng số nốt xuất hiện trên hai con là 7", nên các trường hợp thuận lợi của biến cố *A* là: $(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\Rightarrow|\Omega_A|=6$

Vậy xác suất của biến cố *A* là : $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

b) Biến cố *B*: "Số nốt xuất hiện trên hai con có hiệu là 2", nên các trường hợp thuận lợi của biến cố *B* là:

$(1,3);(2,4);(3,5);(4,6);(3,1);(4,2);(5,3);(6,4)\Rightarrow|\Omega_B|=8$

Vậy xác suất của biến cố *B* là : $P(B)=\dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|}=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$.

Ví dụ 3. An mua một tờ vé số có 5 chữ số. Biết điều lệ của giải thưởng như sau : "Giải đặc biệt" trúng 5 số; "Giải khuyến khích" dành cho những vé chỉ sai một chữ số ở bất cứ hàng nào so với giải đặc biệt. Biết rằng chỉ có một giải đặc biệt. Tính xác suất để An trúng:
a) Giải đặc biệt. b) Giải khuyến khích.

Lời giải

Số các vé có 5 chữ số tùy ý là : $10^5\Rightarrow|\Omega|=10^5$.

a) Chỉ có một giải đặc biệt$\Rightarrow|\Omega_A|=1$, nên xác suất để An trúng giải đặc biệt là:

$$P(A)=\frac{1}{10^5}=0,00001.$$

b) Số vé chỉ sai một chữ số ở bất cứ hàng nào so với giải đặc biệt là :

$$9+9+9+9+9=45\Rightarrow|\Omega_B|=45,$$

nên xác suất để An trúng giải khuyến khích là : $P(B)=\dfrac{45}{10^5}=0,00045$.

Ví dụ 4. Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là : 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 6 kg, 7 kg, 8 kg. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cân trong số đó. Tính xác suất để trọng lượng 3 quả cân được chọn không vượt quá 9 kg.

Lời giải

Ta chọn ngẫu nhiên 3 quả cân trong 8 quả cân, nên kích thước không gian mẫu là: $|\Omega|=C_8^3=56$.

Biến cố A: "Trọng lượng 3 quả cân được chọn không quá 9 kg"

Để được một kết quả thuận lợi của biến cố A, ta có thể chọn theo 7 phương án sau:

+ Chọn các quả cân có trọng lượng là : $\{1kg\,;2kg\,;3kg\}$.

+ Chọn các quả cân có trọng lượng là : $\{1kg\,;2kg\,;4kg\}$.

+ Chọn các quả cân có trọng lượng là : $\{1kg\,;2kg\,;5kg\}$.

+ Chọn các quả cân có trọng lượng là : $\{1\text{kg}\,;2\text{kg}\,;6\text{kg}\}$.

+ Chọn các quả cân có trọng lượng là : $\{1\text{kg}\,;3\text{kg}\,;4\text{kg}\}$.

+ Chọn các quả cân có trọng lượng là : $\{1\text{kg}\,;3\text{kg}\,;5\text{kg}\}$.

+ Chọn các quả cân có trọng lượng là : $\{2\text{kg}\,;3\text{kg}\,;4\text{kg}\}$.

Nên $|\Omega_A| = 7$. Vậy xác suất cần tìm là : $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{7}{56} = \dfrac{1}{8}$.

Ví dụ 5. Một chiếc hộp đựng 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ và 2 quả cầu đen Chọn ngẫu nhiên 6 quả. Tính xác suất để 6 quả được chọn có 3 quả trắng, 2 qu đỏ, 1 quả đen.

Lời giải

Phép thử T: "Chọn ngẫu nhiên 6 quả cầu trong 12 quả cầu" nên kích thước củ không gian mẫu là: $|\Omega| = C_{12}^{6} = 924$.

Biến cố A: "6 quả được chọn có 3 quả trắng, 2 quả đỏ, 1 quả đen". Để được mộ kết quả thuận lợi của A ta phải thực hiện liên tiếp 3 bước:

+ Chọn 3 quả trắng trong 6 quả trắng : có C_6^3 cách

+ Chọn 2 quả đỏ trong 4 quả đỏ : có C_4^2 cách.

+ Chon 1 quả đen trong 2 quả đen : có C_2^1 cách

Suy ra, số kết quả thuận lợi của A là : $|\Omega_A| = C_6^3.C_4^2.C_2^1 = 240$

Vậy xác suất cần tìm là : $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{240}{924} = \dfrac{20}{77}$.

Ví dụ 6. Cho 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30.Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ Tính xác suất để:

a) Tất cả 10 tấm thẻ đều mang số chẵn.

b) Có đúng 5 thẻ mang số chia hết cho 3.

c) Có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó chỉ có một tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Lời giải

Cần chọn 10 tấm thẻ trong 30 tấm thẻ, nên số cách chọn là : C_{30}^{10}.Vậy kích thướ của không gian mẫu: $|\Omega| = C_{30}^{10} = 30045015$.

a) Vì có 15 tấm thẻ mang số chẵn, nên số kết quả thuận lợi của biến cố A: "cả 1 tấm thẻ đều mang số chẵn" là $|\Omega_A| = C_{15}^{10} = 3003$. Vậy xác suất cần tìm:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{3003}{30045015} \approx 0{,}000099.$$

b) Vì trong 30 tấm thẻ có 10 tấm mang số chia hết cho 3,do đó để được một kế quả thuận lợi của biến cố B: "Có đúng 5 thẻ mang số chia hết cho 3 trong 10 tấ thẻ được chọn" ta phải thực hiện hai bước liên tiếp:

+ Chọn 5 tấm thẻ mang số chia hết cho 3 trong 10 tấm: C_{10}^5 cách.

+ Chọn 5 tấm thẻ mang số không chia hết cho 3 trong 20 tấm: C_{20}^5 cách.

Do đó theo quy tắc nhân $\Rightarrow |\Omega_B| = C_{10}^5.C_{20}^5$.

Vậy xác suất cần tìm: $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{10}^5.C_{20}^5}{C_{30}^{10}} \approx 0{,}130$.

c) Trong 30 tấm thẻ có : 15 thẻ mang số chẵn, 15 thẻ mang số lẻ, 3 thẻ mang số chia hết cho 10.

Biến cố C "trong 10 thẻ được chọn có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó chỉ có một tấm thẻ mang số chia hết cho 10". Do đó để được một kết quả thuận lợi của biến cố C ta phải thực hiện ba bước liên tiếp sau:

+ Chọn 5 thẻ trong 15 thẻ mang số lẻ có : C_{15}^5 cách.

+ Chọn 1 thẻ trong 3 thẻ mang số chia hết cho 10 có : C_3^1 cách.

+ Chọn 4 thẻ trong 12 thẻ mang số chẵn nhưng không chia hết cho 10: C_{12}^4 cách.

Theo quy tắc nhân $\Rightarrow |\Omega_C| = C_{15}^5.C_3^1.C_{12}^4$.

Vậy xác suất cần tìm : $P(C) = \dfrac{|\Omega_C|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{15}^5.C_3^1.C_{12}^4}{C_{30}^{10}} \approx 0{,}1484$.

Ví dụ 7. Cho một đa giác đều 8 cạnh. Chọn ngẫu nhiên một đường chéo của đa giác. Tìm xác suất để đường chéo đó có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải

Ta biết cứ hai đỉnh của đa giác thì tạo thành một đường chéo hoặc là một cạnh của đa giác đó, suy ra số cạnh và đường chéo của đa giác là : $C_8^2 = 28$

Vậy số đường chéo của đa giác 8 cạnh là : $C_8^2 - 8 = 20 \Rightarrow |\Omega| = 20$

Đường chéo có độ dài nhỏ nhất là đường chéo được tạo từ hai đỉnh chỉ cách nhau một đỉnh, dễ thấy có 8 đường chéo như thế, do đó nếu gọi biến cố A "đường chéo được chọn có độ dài nhỏ nhất", thì số kết quả thuận lợi của A là : $|\Omega_A| = 8$

Vậy xác suất cần tìm : $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{20} = 0{,}4$.

Ví dụ 8. Một số điện thoại có bảy chữ số, trong đó chữ số đầu là chữ số 8. Số điện thoại được gọi là may mắn nếu bốn chữ số đầu là bốn chữ số chẵn phân biệt, và ba chữ số còn lại là ba chữ số lẻ, đồng thời hai chữ số 0 và 9 không đứng liền nhau. Tính xác suất để một người khi lắp đặt điện thoại ngẫu nhiên được một số điện thoại may mắn.

Lời giải

Số các số điện thoại có bảy chữ số, trong đó chữ số đầu là chữ số 8 là: 10^6

$\Rightarrow |\Omega| = 10^6$.

Ta đi tìm số các số điện thoại may mắn

* Trường hợp 1: Số điện thoại may mắn có dạng : $\overline{8a_2a_30a_5a_6a_7}$

+ Chọn $\overline{a_2a_3}$ có: $A_3^2=6$ cách

+ Chọn a_5 có : 4 cách (vì không được chọn số 9)

+ Chọn $\overline{a_6a_7}$ có: $5.5=25$ cách

Vậy số các số dạng này là : $6.4.25=600$ số .

* Trường hợp 2: Số điện thoại may mắn có dạng: $\overline{8a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$,$(a_4\neq 0)$

+ Chọn a_4 có : 3 cách (vì không được chọn số 0 và số 8)

+ Chọn $\overline{a_2a_3}$ có : $A_3^2=6$ cách

+ Chọn $\overline{a_5a_6a_7}$ có : $5.5.5=125$ cách

Vậy số các số dạng này là : $3.6.125=2250$ số .

Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố *A* : "Một người khi lắp đặt điện thoại ngẫ nhiên được một số điện thoại may mắn" là: $|\Omega_A|=600+2250=2850$

Vậy xác suất cần tìm : $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{2850}{10^6}=0,00285$.

1.3. Bài tập áp dụng

Bài 1. Gieo một đồng tiền 2 lần.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Hãy xác định các biến cố sau :

A: "Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa"; B: "Kết quả hai lần khác nhau".

c) Tính xác suất của hai biến cố trên.

Bài 2. (*) Gieo đồng thời 3 con xúc xắc. Tính xác suất để tổng số nốt xuất hiện củ 3 con là 8.

Bài 3. Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất.

a) Gọi A là biến cố "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện 1 nốt" và B là biến c "Có đúng một con xúc xắc xuất hiện 1 nốt". Tính xác suất của hai biến cố trê

b) Tính xác suất để số nốt xuất hiện trên 2 con xúc xắc hơn kém nhau 3.

Bài 4. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 36. Tính xác suất để s được chọn.

a) Nhỏ hơn 6. b) Là số nguyên tố. c) Chia hết cho 3.

Bài 5. Chọn ngẫu nhiên 5 người có tên trong danh sách 20 người được đánh số 1 đến 20. Tính xác suất để 5 người được chọn có số thứ tự không nhỏ hơn (tính chính xác đến phần vạn).

Bài 6. Một bình chứa 16 viên bi với 7 trắng, 6 xanh, 3 đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 bi. Tính xác suất để :

a) Cả 3 bi đều đỏ. b) Cả 3 bi đều không đỏ.

c) 3 bi có đủ 3 màu. d) Đúng 1 bi trắng.

e) Đúng 2 bi trắng.

Bài 7. Một bình chứa 20 quả cầu với 9 quả cầu trắng, 7 quả cầu đen, 4 quả cầu vàng

a) Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu. Tính xác suất để:

i) Lấy được cả 3 quả cầu đen.

ii) Lấy được cả 3 quả đều không đen.

iii) Lấy được 3 quả 3 màu.

b) Lấy ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để :

i) Lấy được đúng một quả cầu trắng.

ii) Lấy được đúng 2 quả trắng.

c) Lấy ngẫu nhiên 10 quả cầu. Tính xác suất để được 5 quả cầu trắng, 3 quả đen, 2 quả vàng.

Bài 8. Trong 12 người ngẫu nhiên. Tính xác suất để 12 người đó c7ó ngày sinh rơi vào 12 tháng khác nhau.

Bài 9. (*) Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 5 thẻ. Tính xác suất để :

a) Các thẻ số 1, 2, 3 được rút.

b) Có đúng một trong ba thẻ 1, 2, 3 được rút.

c) Không có thẻ nào trong ba thẻ 1, 2, 3 được rút.

Bài 10. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên *N* từ 1 đến 30. Tính xác suất để:

a) *N* là số lẻ. b) *N* là số chẵn

b) *N* chia hết cho 3. d) *N* không chia hết cho 6.

Bài 11. Có hai đội đi thi học sinh giỏi tiếng Anh. Đội thứ nhất có 7 bạn nam và 3 bạn nữ. Đội thứ hai có 4 bạn nam và 6 bạn nữ. Từ mỗi đội chọn ngẫu nhiên một học sinh được thi đầu tiên. Tính xác suất để:

a) Được một bạn nam và một bạn nữ.

b) Được ít nhất một bạn nữ.

Bài 12. Một vé số có 5 chữ số. Khi quay số nếu vé của bạn mua có số trùng hoàn toàn với kết quả thì bạn trúng giải nhất. Nếu vé bạn trúng 4 chữ số sau thì bạn trúng giải nhì.

a) Tính xác suất để bạn trúng giải nhất.

b) Tính xác suất để bạn trúng giải nhì.

Bài 13. Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách đến thuê phòng, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lí chọn ngẫu nhiên 6 người.Tìm xác suất để:

a) Cả 6 người đều là nam.

b) Có 4 nam và 2 nữ.

c) Có ít nhất 2 nữ.

Bài 14. (*) Một đoàn tàu có 4 toa đỗ ở một sân ga. Có 4 hành khách từ sân ga lên tầu, mỗi người độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để một toa có 3 người mới lên, một toa có 1 người mới lên, và các toa còn lại không có ai mới lên.

Bài 15. (*) Một người chơi bài Tú lơ khơ được chia 8 quân bài. Tính xác suất để trong 8 quân bài trên có 3 quân cùng thuộc một bộ, 3 quân thuộc bộ thứ hai, hai quân còn lại thuộc một bộ khác.

Bài 16. Xếp ngẫu nhiên 3 nam và 3 nữ ngồi vào 6 ghế xếp thành hàng ngang. Tính xác suất sao cho :

a) Nam, nữ ngồi xen kẽ.

b) Ba nam ngồi cạnh nhau.

Bài 17. Tám người được xếp ngẫu nhiên vào một bàn tròn, trong đó có một cặp vợ chồng. Tính xác suất để cặp vợ chồng đó được ngồi cạnh nhau.

Bài 18. Trong một cái bình đựng 4 quả cầu xanh và 6 quả cầu đỏ hoàn toàn giống nhau về hình dáng và kích thước. Sau khi trộn đều, ta lấy ra ngẫu nhiên 3 quả cầu cùng một lúc. Tính xác suất để 3 quả cầu lấy ra có 2 quả cầu cùng màu.

(ĐH Dân lập Kỹ thuật công nghệ - 1997).

Bài 19. Trong một chiếc hộp kín có chứa 10 quả cầu trắng và 8 quả cầu đỏ. Giả thiết rằng kích thước và trọng lượng của tất cả các quả cầu nói trên là y hệt nhau. Lấy hú hoạ ra 5 quả cầu. Tính xác suất của biến cố : trong 5 quả cầu được lấy ra có đúng 3 quả cầu đỏ.

(Đại học Thủy lợi – 1977).

Bài 20. Một lớp có 30 học sinh, trong đó gồm 8 học sinh giỏi, 15 học sinh khá và 7 học sinh trung bình. Người ta muốn chọn ngẫu nhiên 3 em để đi dự Đại hội. Tính xác suất để được :

a) Ba học sinh được chọn đều là học sinh giỏi ?

b) Có ít nhất 1 học sinh giỏi ?

c) Không có học sinh trung bình ?

(ĐH Đà Nẵng- Khối A -1998).

Bài 21. Một bình đựng 7 viên bi chỉ khác nhau về màu, trong đó có 4 viên bi màu xanh và 3 viên bi màu đỏ.Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi.Tính xác suất để được:

a) 2 viên bi màu đỏ và 1 viên bi màu xanh?

b) Cả 3 viên bi đều màu xanh?

(ĐH Tài chính Kế toán Hà Nội-1998).

Bài 22. a) Gieo liên tiếp 3 lần một con xúc xắc. Tìm xác suất của biến cố: tổng số chấm không nhỏ hơn 16?

b) Xếp ngẫu nhiên 5 chữ cái: B, G, N, O, O. Tìm xác suất để được chữ BOONG?

(ĐH Quốc gia TPHCM-Khối D-Đợt 1-1999).

Bài 23. Một lô hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy tuỳ ý 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tìm xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra có không quá 1 phế phẩm ?

(ĐH Giao thông vận tải Hà Nội – 2000).

Bài 24. Một tổ gồm có 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ.

a) Cần chọn một nhóm 4 người làm trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau.

b) Tính xác suất để khi chọn ngẫu nhiên một nhóm 4 người ta được nhóm có đúng 1 nữ.

c) Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 người để đi làm công việc khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau? Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ.

(ĐH Nông nghiệp 1 -1997).

2. Tính xác suất của một biến cố theo các quy tắc

2.1. Phương pháp:

- Khi gặp bài toán tính xác suất của một biến cố phức tạp ta có thể phân tích biến cố đó thành hợp, hoặc giao của các biến cố đơn giản hơn. Rồi áp dụng các quy tắc cộng hoặc nhân xác suất để suy ra kết quả.

- Khi áp dụng quy tắc cộng cần phân tích biến cố đã cho thành hợp của các biến cố phải xung khắc đôi một với nhau. Khi áp dụng quy tắc nhân xác suất cần phân tích biến cố đã cho thành giao của các biến cố phải độc lập với nhau.
- Nếu *A* và *B* là hai biến cố không xung khắc thì:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

2.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Có hai hộp chứa các viên bi chỉ khác về màu. Hộp thứ nhất chứa 3 bi xanh, 2 bi vàng, 1 bi đỏ. Hộp 2 chứa 2 bi xanh, 1 bi vàng, 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một viên bi. Tính xác suất để lấy được 2 bi xanh.

Lời giải

Gọi *A* là biến cố "bi được lấy ở hộp 1 màu xanh", suy ra xác suất của biến cố này là : $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Gọi *B* là biến cố "bi được lấy ở hộp 2 màu xanh", suy ra xác suất của biến cố này là : $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Gọi biến cố *C* là: "2 bi lấy được ở hai hộp đều màu xanh"

$\Rightarrow C=AB$ mà *A* và *B* là hai biến cố độc lập nên

$$P(C)=P(A).P(B)=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

í dụ 2. Ba xạ thủ cùng bắn độc lập vào một bia, mỗi người bắn một viên đạn. Xác suất bắn trúng của từng xạ thủ lần lượt là : $0,6$; $0,7$; $0,8$. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia.

Lời giải

Gọi A_1 là biến cố " xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia " $\Rightarrow P(A_1)=0,6$.

Gọi A_2 là biến cố " xạ thủ thứ hai bắn trúng bia " $\Rightarrow P(A_2)=0,7$.

Gọi A_3 là biến cố " xạ thủ thứ ba bắn trúng bia " $\Rightarrow P(A_3)=0,8$.

Nếu gọi B là biến cố " có ít nhất 1 xạ thủ bắn trúng bia thì $\overline{B}$ là biến cố " không ó xạ thủ nào bắn trúng bia " $\Rightarrow \overline{B}=\overline{A_1A_2A_3}$ mà A_1, A_2, A_3 độc lập, nên:

$$P(\overline{B})=P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3})=(1-0,6).(1-0,7).(1-0,8)=0,024$$

Vậy xác suất cần tìm là : $P(B)=1-P(\overline{B})=1-0,024=0,976$.

í dụ 3. Một máy bay có 3 bộ phận *A, B, C* có tầm quan trọng khác nhau. Máy bay sẽ rơi khi có 1 viên đạn trúng vào *A*, hoặc 2 viên đạn trúng vào *B*, hoặc 3 viên đạn trúng vào *C*. Giả sử các bộ phận *A, B, C* lần lượt chiếm 15%, 30% và 50% diện tích máy bay. Tính xác suất để máy bay rơi nếu máy bay bị trúng 2 viên đạn.

Lời giải

Gọi *A* là biến cố "có một viên đạn trúng vào *A*". Khi đó biến cố $\overline{A}$ là biến c
"cả hai viên đạn đều không trúng vào *A*".

Ta có: $P(\overline{A}) = (0,85).(0,85) = 0,85^2 \Rightarrow P(A) = 1 - 0,85^2 = 0,2775$.

Gọi *B* là biến cố "cả hai viên đạn trúng vào *B*" $\Rightarrow P(B) = (0,3)^2 = 0,09$

Biến cố *C*: "máy bay rơi nếu trúng 2 viên đạn" $\Rightarrow C = A \cup B$, mặt khác *A* v
B là hai biến cố xung khắc nên $P(C) = P(A) + P(B) = 0,2775 + 0,09 = 0,3675$.

Ví dụ 4. Một hộp chứa 12 bóng đèn, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để lấy được:

a) 3 bóng tốt
b) ít nhất 2 bóng tốt.

(Đại học Tài chính Kế toán HN – 1977).

Lời giải

Nếu lấy ngẫu nhiên 3 bóng đèn trong 12 bóng đèn thì có C_{12}^3 cách. Do đó kíc
thước của không gian mẫu là: $|\Omega| = C_{12}^3 = 220$ phần tử.

a) Gọi A là biến cố "lấy được 3 bóng tốt ".

Số kết quả thuận lợi của A là $|\Omega| = C_7^3 \Rightarrow P(A) = \frac{C_7^3}{220} = \frac{7}{44}$.

b) Gọi B_1 là biến cố "lấy được 2 bóng tốt, 1 bóng xấu ".

Số kết quả thuận lợi của B_1 là $|\Omega_{B_1}| = C_7^2.C_5^1 \Rightarrow P(B_1) = \frac{C_7^2.C_5^1}{220} = \frac{21}{44}$.

Nếu B: "lấy được ít nhất 2 bóng tốt thì $B = B_1 \cup A$, mà B_1 và A là hai biế
cố xung khắc nên: $P(B) = P(B_1) + P(A) = \frac{21}{44} + \frac{7}{44} = \frac{7}{11}$.

Vậy: a) xác suất để được 3 bóng tốt là : $P(A) = \frac{7}{44}$;

b) xác suất để được ít nhất 2 bóng tốt là $P(B) = \frac{7}{11}$.

Ví dụ 5. Trong một lớp học có 6 bóng đèn, mỗi bóng có xác suất bị cháy là $1/4$
Lớp học đủ độ sáng nếu có ít nhất 4 bóng đèn sáng. Tính xác suất để lớp họ
không đủ độ sáng.

Lời giải

Gọi A là biến cố " lớp học có 6 bóng đèn sáng" thì $P(A) = \left(\frac{3}{4}\right)^6$

Gọi B là biến cố " lớp học có 5 bóng đèn sáng" thì $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_6$.

Trong đó mỗi biến cố B_i: "đèn thứ i tắt, các đèn còn lại sáng"

$$\Rightarrow P(B_i) = \frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^5. \text{ Do đó, } P(B) = 6.\frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^5.$$

Gọi C là biến cố " lớp học có 4 bóng đèn sáng" thì $C = \bigcup_{i=1}^{C_6^4} C_i$

Trong đó mỗi biến cố C_i: "có 2 đèn trong 6 đèn tắt,các đèn còn lại sáng"

$$\Rightarrow P(C_i) = \left(\frac{1}{4}\right)^2.\left(\frac{3}{4}\right)^4. \text{ Do đó, } P(C) = C_6^4\left(\frac{1}{4}\right)^2.\left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

Vậy, nếu D :" lớp học đủ sáng" thì $D = A \cup B \cup C$, mà A, B, C là ba biến cố xung khắc nên:

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = \left(\frac{3}{4}\right)^6 + 6.\frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^5 + C_6^4\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,8306$$

Biến cố "lớp học không đủ sáng" chính là $\overline{D} \Rightarrow P(\overline{D}) \approx 1 - 0,8306 = 0,1694$.

Ví dụ 6. Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số. Tính xác suất để số trên vé không có chữ số 2 hoặc chữ số 8.

Lời giải

Số các vé xổ số có 5 chữ số là : $10^5 \Rightarrow |\Omega| = 10^5$

A = {các vé không có chữ số 2} thì $|A| = 9^5$

B = {các vé không có chữ số 8} thì $|B| = 9^5$

$A \cap B$ = {các vé không có chữ số 2 và chữ số 8} thì $|A \cap B| = 8^5$

$A \cup B$ = {các vé không có chữ số 2 hoặc chữ số 8}

Theo quy tắc cộng suy rộng : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 9^5 + 9^5 - 8^5$

Nếu biến cố C là "số trên vé không có chữ số 2 hoặc chữ số 8" thì :

$$|\Omega_C| = 2.9^5 - 8^5$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{|\Omega_C|}{|\Omega|} = \frac{2.9^5 - 8^5}{10^5} = 0,8533.$$

2.3. Bài tập áp dụng:

Bài 25. Từ một hộp chứa 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên bốn quả.Tính xác suất để:

a) Bốn quả lấy ra cùng màu.
b) Có ít nhất một quả trắng.

Bài 26. Gieo bốn đồng xu cân đối. Tính xác suất để :

a) Cả bốn đồng xu đều sấp.
b) Có ít nhất một đồng xu sấp.
c) Có đúng một đồng xu sấp.

Bài 27. (*) Gieo hai đồng xu chế tạo không cân đối. Đồng xu thứ nhất có xác suất xuất hiện mặt sấp gấp 2 lần xuất hiện mặt ngửa, đồng xu thứ hai có xác suất xuất hiện mặt ngửa gấp 3 lần xuất hiện mặt sấp. Tính xác suất để:

a) Khi gieo hai đồng xu một lần cả hai đồng xu đều ngửa.
b) Khi gieo hai đồng xu hai lần thì cả hai lần hai đồng xu đều sấp.

Bài 28. Gieo một đồng xu với một con xúc xắc độc lập với nhau. Tính xác suất để đồng xu xuất hiện mặt sấp và con xúc xắc xuất hiện mặt 3 chấm.

Bài 29. Hai người cùng bắn vào một mục tiêu.Xác suất bắn trúng của từng người (0,8 và 0,9.Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Chỉ có một người bắn trúng mục tiêu.

b) Cả hai người bắn trượt.

c) Có ít nhất một người bắn trúng mục tiêu.

Bài 30. (*) Trong trò chơi "Chiếc nón kì diệu" khi một người quay chiếc kim c thể dừng lại một trong các vị trí : 2 ô 10 điểm, 2 ô 20 điểm, 2 ô 30 điểm, 2 ô m điểm, 1 ô gấp đôi, 1 ô phần thưởng, với khả năng như nhau. Tính xác suất đ sau 2 lần quay người đó được:

a) Phần thưởng.

b) 60 điểm. (Giả sử người đó luôn trả lời đúng câu hỏi sau khi quay).

Bài 31. (*) Một bài thi trắc nghiệm có 50 câu hỏi. Mỗi câu có 4 phương án trả l trong đó chỉ có một câu trả lời đúng. Nếu trả lời đúng thì được 0,2 điểm, nếu tr lời sai thì không được điểm. Bạn Anh không học bài nên làm bài thi bằng các ở mỗi câu chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác suất để bạn An được 5 điểm.

Bài 32. Một chiếc tàu khoan thăm dò dầu khí trên thềm lục địa có xác suất khoa trúng túi dầu là 0,2. Tính xác suất để trong năm lần khoan độc lập, chiếc tàu đ khoan trúng túi dầu :

a) Trúng một lần duy nhất.

b) Ít nhất trúng một lần.

Bài 33. (*) Một máy bay có 5 động cơ, trong đó có 3 động cơ nằm ở cánh trái và động cơ nằm ở cánh phải. Mỗi động cơ ở cánh phải có xác suất bị hỏng là 0, còn mỗi động cơ ở cánh trái có xác suất hỏng là 0,3, các động cơ hoạt động độ lập với nhau. Tính xác suất để máy bay thực hiện chuyến bay an toàn, trong cá trường hợp sau:

a) Máy bay được nếu có ít nhất 3 động cơ làm việc.

b) Máy bay được nếu có ít nhất trên mỗi cánh có một động cơ làm việc.

Bài 34. Chọn ngẫu nhiên 4 người, biết rằng không có ai sinh vào năm nhuận. Tín xác suất để có ít nhất 2 người có sinh nhật trùng nhau (cùng ngày, cùng tháng).

Bài 35. (*) Một người say rượu bước 8 bước, mỗi bước anh ta tiến lên phía trước mét hoặc lùi lại phía sau 1 mét đều có xác suất như nhau. Tính xác suất để sau bước:

a) Anh ta trở lại điểm xuất phát.

b) Anh ta cách chỗ xuất phát hơn 4 mét.

Bài 36. (*) Một Nhà xuất bản phát hành ba tên sách A, B, C. Thống kê cho thấy c 50% học sinh mua sách A ; 70% học sinh mua sách B ; 60% mua sách C; 30% mua sách A và B ; 40% mua sách B và C ; 20% mua sách A và C ; 10% mua c ba tên sách A, B, C. Chọn ngẫu nhiên một học sinh.

a) Tính xác suất để em đó mua sách A hoặc B.

b) Tính xác suất để em đó mua ít nhất một trong ba tên sách nói trên

c) Tính xác suất để em đó mua đúng hai trong ba tên sách nói trên.

Bài 37. Gieo đồng thời 3 đồng xu đối xứng và đồng chất. Tính xác suất để ít nhấ có 1 mặt sấp xuất hiện.

(ĐH Giao thông vận tải -1998)

Bài 38. Một bà mẹ mong muốn sinh bằng được con gái (sinh được con gái rồi th không sinh nữa; chưa sinh được con gái thì bà sẽ sinh nữa). Xác suất sinh đượ

con gái trong một lần sinh là 0,486. Tìm xác suất cho bà mẹ đạt được mong muốn ở lần sinh thứ hai ?

(ĐH Y khoa Hà Nội -1998).

Bài 39. Hai máy bay ném bom một mục tiêu, mỗi máy bay ném 1 quả với xác suất trúng mục tiêu tương ứng là : 0,7 và 0,8. Tìm xác suất % để mục tiêu bị trúng bom ?

(ĐH Đà Nẵng- Khối A-1999).

3. Các bài toán có liên quan đến biến ngẫu nhiên rời rạc :

3.1. Phương pháp :

- Việc lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc *X* bao gồm hai bước:
  - ➢ Xác định tập giá trị $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ của *X*.
  - ➢ Tính các xác suất : $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$.
- Biết được bảng phân bố xác suất của *X* thì coi như đã biết đầy đủ về *X*. Từ đó về nguyên tắc có thể tính được tất cả các xác suất có liên quan đến *X*.
- Để tính được $E(X)$, $V(X), \sigma(X)$ ta phải lập được bảng phân bố xác suất của *X*, rồi áp dụng các công thức, suy ra kết quả.
- Kì vọng $E(X)$ chính là độ lớn trung bình của biến ngẫu nhiên rời rạc *X*.

3.2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Một nhóm có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên ra ba người, gọi *X* là số nữ trong ba người được chọn. Lập bảng phân bố xác suất của *X*, rồi tính $E(X)$, $V(X), \sigma(X)$.

Lời giải

Rõ ràng *X* là biến nhẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị trong tập : $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

Để lập được bảng phân bố xác suất của *X*, ta cần tính : $P(X = 0); P(X = 1); P(X = 2); P(X = 3)$.

Ta có : $|\Omega| = C_{10}^3 = 120$.

+ Khi $X = 0$, tức là ba người được chọn đều là nam $\Rightarrow |\Omega_A| = C_6^3 = 20$.

Vậy $P(X = 0) = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$.

+ Khi $X = 1$, tức là ba người được chọn có 1 nữ, 2 nam

$\Rightarrow |\Omega_B| = C_4^1 C_6^2 = 60$. Vậy $P(X = 1) = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$.

+ Khi $X = 2$, tức là ba người được chọn có 2 nữ, 1 nam

$\Rightarrow |\Omega_C| = C_4^2 C_6^1 = 36$. Vậy $P(X = 2) = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}$.

+ Khi $X=3$, tức là ba người được chọn đều là nữ

$$\Rightarrow |\Omega_D| = C_4^3 = 4.\ \text{Vậy } P(X=3) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

Vậy ta có bảng phân bố xác suất sau :

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Do đó ta có : $E(X) = 0.\frac{1}{6} + 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{3}{10} + 3.\frac{1}{30} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

$$V(X) = 0^2.\frac{1}{6} + 1^2.\frac{1}{2} + 2^2.\frac{3}{10} + 3^2.\frac{1}{30} - (1{,}2)^2 = 0{,}56$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}7483.$$

Ví dụ 2. Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong các gia đình có 4 con. Gọi *X* là số con gái trong gia đình đó. Hãy lập bảng phân bố xác suất của *X*. Tính kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của *X* (giả thiết xác suất sinh con gái là 0,5).

Lời giải

Rõ ràng X là biến nhẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị trong tập : $\{0;1;2;3;4\}$

Để lập được bảng phân bố xác suất của X, ta cần tính : $P(X=0)$; $P(X=1)$; $P(X=2)$; $P(X=3)$; $P(X=4)$.

Gọi A_i là biến cố "người con thứ i trong gia đình được chọn là con gái"

$$\Rightarrow P(A_i) = 0{,}5,\ \left(i = \overline{1,4}\right).$$

+ $P(X=0) = P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\right) = (0{,}5)^4 = 0{,}0625.$

+ $P(X=1) = P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4\right)$

$$= C_4^1.(0{,}5)^4 = 4.(0{,}5)^4 = 0{,}25.$$

Lập luận tương tự, ta cũng được:

+ $P(X=2) = C_4^2(0{,}5)^4 = 0{,}375$

+ $P(X=3) = C_4^3(0{,}5)^4 = 0{,}25$

+ $P(X=4) = C_4^4(0{,}5)^4 = 0{,}0625$

Vậy ta có bảng phân bố xác suất sau :

X	0	1	2	3	4
P	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

Do đó ta có: $E(X)=2$; $V(X)=1$; $\sigma(X)=1$.

Gọi X là số câu trả lời đúng của Bình nên X nhận các giá trị trong tập :

$$\{0;1;2;3;4;5\}$$

Để lập bảng phân bố xác suất của *X* ta phải tính các xác suất:

$$P(X=0);\ P(X=1);\ P(X=2);\ P(X=3);\ P(X=4);\ P(X=5)$$

+ $P(X=0)$ là xác suất của biến cố "Bình không trả lời đúng câu nào"

$$\Rightarrow P(X=0) = \left(1-\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}.$$

+ $P(X=1)$ là xác suất của biến cố "Bình trả lời đúng 1 câu"

$$\Rightarrow P(X=1) = C_5^1.\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{5.3^4}{4^5}.$$

Tương tự ta cũng có : $P(X=2) = C_5^2.\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{10.3^3}{4^5}$

$$P(X=3) = C_5^3.\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{10.3^2}{4^5}$$

$$P(X=4) = C_5^4.\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(1-\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{5.3}{4^5};$$

$$P(X=5) = C_5^5.\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{4^5}.$$

Vậy ta có bảng phân bố xác suất sau :

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{45}{512}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Giá trị trung bình của *X* (chính là kì vọng của *X*) : $E(X) = \sum_{i=0}^{5} x_i p_i = \frac{5}{4}.$

Vậy điểm trung bình mà Bình có thể đạt được là 1,25 điểm.

í dụ 4. Số người chết trong một tuần ở vùng *A* là một biến ngẫu nhiên rời rạc *X* có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,4	0,3	0,15	0,05

Số trẻ sinh ra trong một tuần ở vùng *A* là một biến ngẫu nhiên rời rạc *Y* có bảng hân bố xác suất như sau:

Y	0	1	2	3
P	0,2	0,2	0,3	0,3

a) Tính số trẻ em sinh ra và số người chết trung bình trong một tuần.

b) Số dân trong vùng trung bình một tuần tăng bao nhiêu ?

Lời giải

a) Số trẻ em sinh ra trung bình trong một tuần chính là :

$$E(Y)=0.(0,2)+1.(0,2)+2(0,3)+3.(0,3)=1,7$$

Số người chết trung bình trong một tuần chính là :

$$E(X)=0.(0,1)+1.(0,4)+2(0,3)+3.(0,15)+4.(0,05)=1,65.$$

b) Số dân trong vùng trung bình một tuần tăng : $1,7-1,65=0,05$.

Ví dụ 5. Số vụ tai nạn giao thông ở địa điểm A vào chiều thứ 6 là một biến ngẫ nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,15	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05

Biết rằng nếu số vụ tai nạn nhiều hơn 2 thì phải tăng cường thêm cảnh sát gia thông.

a) Tính xác suất để phải tăng cường thêm cảnh sát giao thông vào chiều thứ 6.

b) Tính xác suất để số vụ tai nạn giao thông ít nhất là 1 vào chiều thứ 6.

Lời giải

a) Gọi A là biến cố "phải tăng cường thêm cảnh sát giao thông vào chiều thứ 6"

$$\Rightarrow P(A)=P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
$$=0,2+0,1+0,05=0,35.$$

b) Gọi B là biến cố "số vụ tai nạn giao thông ít nhất là 1 vào chiều thứ 6"

$$\Rightarrow P(B)=P(x\ge 1)=1-P(X=0)=1-0,15=0,85.$$

3.3.Bài tập áp dụng

Bài 40. Trong một chiếc hộp có 4 thẻ đánh số từ 1 đến 4. Chọn ngẫu nhiên hai tấ thẻ rồi rồi cộng hai số ghi trên hai tấm thẻ với nhau. Gọi X là kết quả. Tìm bả phân bố xác suất của X, tính $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.

Bài 41. Một lô hàng gồm 7 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm. Chọn ngẫu nhiên 4 sản phẩm để kiểm tra. Gọi X là số sản phẩm tốt trong 4 sản phẩm lấy ra. Lậ bảng phân bố xác suất và tính $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.

Bài 42. (*) Một túi chứa 4 quả cầu trắng và 3 quả cầu đen. Hai người chơi A và lần lượt lấy 1 quả cầu trong túi (lấy xong không trả lại vào túi). Trò chơi k thúc khi có người lấy được quả cầu đen. Người đó coi như thua cuộc và phải t cho người kia số tiền X bằng số quả cầu lấy ra nhân với 50.000 đồn

a) Giả sử A là người lấy trước và X là số tiền A thu được. Lập bảng phân bố c X. Tính $E(X)$.

b) Nếu chơi 150 ván thì A sẽ được bao nhiêu tiền.

Bài 43. Số lỗi đánh máy trên một trang sách là một biến ngẫu nhiên rời rạc X bảng phân bố xác suất như sau:

a) Giả sử A là người lấy trước và X là số tiền A thu được. Lập bảng phân bố của X. Tính $E(X)$.

b) Nếu chơi 150 ván thì A sẽ được bao nhiêu tiền.

Bài 43. Số lỗi đánh máy trên một trang sách là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,01	0,07	0,3	0,4	0,2	0,02

Tính xác suất để :

a) Trên trang sách có nhiều nhất là 3 lỗi.

b) Trên trang sách có ít nhất 3 lỗi.

Bài 44. Gọi X là biến ngẫu nhiên rời rạc chỉ số điểm mà một vận động viên bắn súng đạt được khi bắn một lần.Giả sử X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	10	9	8	7	6	5
P	0,2	0,36	0,24	0,1	0,08	0,02

a) Tính điểm trung bình khi người đó bắn 1 lần.

b) Khi người đó bắn 60 lần, người đó đạt được trung bình khoảng bao nhiêu điểm.

Bài 45. (*) Trong một chiếc hòm có 5 bóng đèn trong đó có 2 bóng tốt, 3 bóng hỏng. Ta chọn ngẫu nhiên từng bóng đem thử (thử xong không trả lại) cho đến khi thu được 2 bóng tốt. Gọi X là số lần thử cần thiết. Lập bảng phân bố xác suất của X. Trung bình cần thử mấy lần thì được 2 bóng tốt.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ CÁC BÀI TẬP

§1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN, HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

Bài 1. *Đáp số* : 2880000 dãy.

Bài 2. *Đáp số* : 42000 số.

Bài 3. *Đáp số* : 324 cách.

Bài 4. *Đáp số* : $C_8^2.C_5^1.C_3^1+C_8^1.C_5^2.C_3^1+C_8^1.C_5^1.C_3^2$ cách.

Bài 5. Đặt $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Số phải tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

a) Để tạo được một số gồm 5 chữ số khác nhau, ta phải thực hiện theo hai bước liên tiếp:

+ Chọn $a_1\in A\setminus\{0\}$: có 6 cách.

+ Chọn 4 chữ số thuộc $A\setminus\{a_1\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có A_6^4 cách

Vậy theo quy tắc nhân có tất cả $6.A_6^4=2160$ (số).

b)

* *Cách giải 1*

+ *Trường hợp 1:* $a_5=0$

Chọn 4 chữ số thuộc $A\setminus\{0\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có A_6^4 cách.

Trường hợp này có: $A_6^4=360$ (số).

+ *Trường hợp 2 :* $a_5\in\{2,4,6\}$

- Chọn $a_5\in\{2,4,6\}$: có 3 cách
- Chọn $a_1\in A\setminus\{0,a_5\}$: có 5 cách
- Chọn 3 số chữ số thuộc $A\setminus\{a_1,a_5\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có A_5^3 cách

Trường hợp này có : $3.5.A_5^3=900$ (số)

Vậy theo quy tắc cộng có tất cả: $360+900=1260$ (số).

* *Cách giải 2*

+ Trước hết ta tìm các số chẵn có 5 chữ số khác nhau, kể cả các số có chữ số a_1 bằng 0 hoặc khác 0.

- Chọn $a_5\in\{0,2,4,6\}$: có 4 cách
- Chọn 4 chữ số thuộc $A\setminus\{a_5\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có A_6^4 cách

Suy ra có $4.A_6^4$ số.

+ Tiếp theo ta tìm các số chẵn có dạng $\overline{0a_2a_3a_4a_5}$

- Chọn $a_5\in\{2,4,6\}$: có 3 cách
- Chọn 3 số trong 5 chữ số còn lại thuộc $A\setminus\{0,a_5\}$ xếp vào các vị trí a_2,a_3,a_4 : có A_5^3 cách

Suy ra có $3.A_5^3$ số.

Vậy số các số cần tìm là: $4.A_6^4-3.A_5^3=1440-180=1260$ (số).

c) * *Cách giải 1*

+ Trước hết ta tìm các số có 5 chữ số khác nhau, kể cả các số có chữ số 5 hoặc không có chữ số 5.

- Chọn $a_1\in A\setminus\{0\}$: có 6 cách
- Chọn 4 số trong 6 chữ số còn lại thuộc $A\setminus\{a_1\}$ xếp vào các vị trí a_2,a_3,a_4,a_5 : có A_6^4 cách

Suy ra có $6.A_6^4$ số.

+ Tiếp theo ta tìm các số có 5 chữ số khác nhau, trong đó không có chữ số 5.

- Chọn $a_1\in A\setminus\{0,5\}$: có 5 cách
- Chọn 4 số trong 5 chữ số còn lại thuộc $A\setminus\{5,a_1\}$ xếp vào các vị trí a_2,a_3,a_4,a_5 : có A_5^4 cách

Suy ra có $5.A_5^4$ số.

Vậy số các số cần tìm là : $6.A_6^4-5.A_5^4=2160-600=1560$ (số).

* *Cách giải 2*

+ *Trường hợp 1:* $a_1=5$

Chọn 4 số trong 6 chữ số còn lại thuộc $A\setminus\{5\}$ xếp vào các vị trí a_2,a_3,a_4,a_5 : có A_6^4 cách ⇒ Trường hợp này có A_6^4 số.

+ *Trường hợp 2:* $a_1\neq 5$

- Xếp chữ số 5 vào một trong 4 vị trí a_2,a_3,a_4,a_5 : có 4 cách
- Chọn $a_1\in A\setminus\{0,5\}$: có 5 cách
- Chọn 3 số trong 5 chữ số thuộc $A\setminus\{a_1,5\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có A_5^3 cách

⇒ Trường hợp này có $4.5.A_5^3$ số.

Vậy số các số cần tìm là: $A_6^4+4.5.A_5^3=1560$ (số).

Bài 6. Số phải tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$

+ *Trường hợp 1:* $a_4=0$

Chọn 3 chữ số thuộc $E\setminus\{0\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có $A_6^3=120$ cách.

Trường hợp này có: $A_6^3=120$ (số).

+ *Trường hợp 2 :* $a_4\in\{2,4\}$

- Chọn $a_4\in\{2,4\}$: có 2 cách
- Chọn $a_1\in E\setminus\{0,a_4\}$: có 5 cách
- Chọn 2 số chữ số thuộc $E\setminus\{a_1,a_5\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có A_5^2 cách

Trường hợp này có : $2.5.A_5^2=200$ (số)

Vậy theo quy tắc cộng có tất cả: $120+200=320$ (số).

Bài 7. Đặt $X=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, $(a_1\neq 0)$

- *Trường hợp 1.* $a_4=0$

Chọn ba chữ số thuộc $X\setminus\{0\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có A_6^3 cách

Trường hợp này có: $A_6^3 = 120$ (số).

- *Trường hợp 2.* $a_4 \neq 0$
  - ○ Chọn $a_4 \in \{2,4,6\}$: có 3 cách.
  - ○ Chọn $a_1 \in X\setminus\{0,a_4\}$: có 5 cách.
  - ○ Chọn 2 chữ số thuộc $X\setminus\{a_1,a_4\}$ xếp vào hai vị trí còn lại có A_5^2 cách.

Trường hợp này có: $3\cdot5\cdot A_5^2 = 300$ (số).

Vậy có tất cả $120+300=420$ (số).

Bài 8. Đặt $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Gọi số cần tìm là : $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ $(a_1 \neq 0)$

- *Trường hợp 1:* $a_7 = 0$
  - ○ Chọn a_7 : có 1 cách
  - ○ Chọn 6 chữ số còn lại thuộc $A\setminus\{0\}$: có A_8^6 cách

$\Rightarrow$ Trường hợp này có : $1.A_8^6 = 20160$ (số)

- *Trường hợp 2:* $a_7 \in \{2,4,6,8\}$
  - ○ Chọn $a_7 \in \{2,4,6,8\}$: có 4 cách
  - ○ Chọn $a_1 \in A\setminus\{0,a_7\}$: có 7 cách
  - ○ Chọn 5 chữ số còn lại thuộc $A\setminus\{a_1,a_7\}$: có A_7^5 cách

Nên trường hợp này có : $4\cdot7\cdot A_7^5 = 70560$ (số)

Vậy có tất cả: $20160+70560=90720$ (số).

Bài 9. Số cần tìm có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, $(a_1 \neq 0)$

- *Bước 1 :* Ta chọn 2 số lẻ trong 3 số lẻ 1,3,5 và có : A_3^2 cách.
- *Bước 2 :* Ta coi như 2 số lẻ đứng kề nhau là một số x lúc đó mỗi số cần tìm là một số có 4 chữ số gồm x và 3 số trong 4 số chẵn 0,2,4,6 .Ta đi tìm số các số dạng này bằng cách chia thành các trường hợp sau :
  - ○ *Trường hợp 1:* $a_5 = 0$
    - • Có 3 cách chọn vị trí cho x
    - • Chọn 2 số chẵn trong 3 số chẵn xếp vào 2 vị trí còn lại có : A_3^2 cách.

      Vậy trường hợp này có : $3.A_3^2 = 18$ (cách).
  - ○ *Trường hợp 2:* $a_5 \neq 0$ và x đứng đầu
    - • Chọn $a_5 \in \{2,4,6\}$ có 3 cách .
    - • Chọn 2 số chẵn trong 3 số chẵn xếp vào 2 vị trí còn lại có: A_3^2 cách.

      Vậy trường hợp này có : $3.A_3^2 = 18$ (cách).

  - ○ *Trường hợp 2:* $a_5 \neq 0$ và x không đứng đầu
    - • Chọn $a_5 \in \{2,4,6\}$ có 3 cách .
    - • Chọn vị trí cho x có 2 cách.
    - • Chọn $a_1 \in \{2,4,6\}\setminus\{a_5\}$ có 2 cách.
    - • Chọn 1 số chẵn trong 2 số chẵn xếp vào 1 vị trí còn lại có : 2 cách.

      Vậy trường hợp này có : $3.2.2.2 = 24$ (cách).

Vậy bước 2 có : $18+18+24=60$ cách

Do đó số các số thỏa yêu cầu bài toán là: $6.60=360$ (số).

Bài 10. Đặt $X=\{0,1,2,3,\cdots,9\}$

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, $(a_1 \neq 0)$

- *Trường hợp 1:* $a_4 = 0$
  - ○ Chọn $a_1 \in X\setminus\{0,1\}$: có 8 cách.
  - ○ Chọn hai chữ số thuộc $X\setminus\{0,a_1\}$ xếp vào hai vị trí a_2, a_3 : có A_8^2 cách.

Trường hợp này có: $8.A_8^2 = 448$ (số).

- *Trường hợp 2:* $a_4 \neq 0$
  - ○ Chọn $a_4 \in \{2,4,6,8\}$: có 4 cách.
  - ○ Chọn $a_1 \in X\setminus\{0,1,a_4\}$: có 7 cách.
  - ○ Chọn hai chữ số thuộc $X\setminus\{a_1,a_4\}$ xếp vào hai vị trí a_2 , a_3 : có A_8^2 cách.

Trường hợp này có: $4\cdot7\cdot A_8^2 = 1568$ (số).

Vậy có tất cả: $448+1568=2016$ (số).

Bài 11. Đặt $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

Gọi số cần tìm là : $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ $(a_1 \neq 0)$.

- Chọn 2 trong 5 vị trí xếp hai chữ số 1 và 5: Có $A_5^2 = 20$ (cách)
- Chọn 3 chữ số thuộc $A\setminus\{1,5\}$ xếp vào 3 vị trí còn lại: Có $A_5^3 = 60$ (cách)

Vậy có tất cả: $20.60=1200$ (số).

Bài 12. a) Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$.

Đặt $n=\overline{11111}$. Mỗi số cần tìm ứng với một hoán vị của 5 phần tử trong tập $\{n,2,3,4,5\}$. Vậy có tất cả: $5!=120$ (số).

b) Để tạo được số cần tìm ta thực hiện theo hai bước liên tiếp sau :

- Xếp 4 chữ số 2, 3, 4, 5 vào 4 trong 9 vị trí từ a_1 đến a_9 : có A_9^4 cách
- Xếp 5 chữ số 1 vào 5 vị trí còn lại: có 1 cách

Vậy có tất cả : $A_9^4 = 3024$ số.

Bài 13. *Hướng dẫn :* Chia thành 5 trường hợp , trong mỗi trường hợp thực hiện 2 bước liên tiếp chọn 2 vị trí trong 6 vị trí cho số xuất hiện 2 lần ; xếp 4 số còn lại vào 4 vị trí còn lại. *Đáp số :* Có tất cả : $5.C_6^2.4! = 1800$ (số).

Bài 14. Đặt $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Số phải tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$

Số chia hết cho 5 có chữ số tận cùng bằng 0 hoặc 5

+ *Trường hợp 1 :* $a_6=0$

- Chọn $a_1\in A\setminus\{0\}$: có 9 cách
- Chọn 4 số trong 8 chữ số còn lại thuộc $A\setminus\{0,a_1\}$ xếp vào các vị tr a_2,a_3,a_4,a_5 : có A_8^4 cách

$\Rightarrow$ Trường hợp này có : $9.A_8^4=15120$ số.

+ *Trường hợp 2 :* $a_6=5$

- Chọn $a_1\in A\setminus\{0,5\}$: có 8 cách
- Chọn 4 số trong 8 chữ số còn lại thuộc $A\setminus\{5,a_1\}$ xếp vào các vị tr a_2,a_3,a_4,a_5 : có A_8^4 cách

$\Rightarrow$ Trường hợp này có : $8.A_8^4=13440$ số.

Vậy các số cần tìm là : $15120+13440=28560$ (số).

Bài 15. Nếu gọi M là số các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau và N là số các s tự nhiên có ba chữ số khác nhau chia hết cho 3 được tạo từ $A=\{0;1;2;3;4;5\}$, thì số các số cần tìm sẽ là : $M-N$.

+ Trước hết ta tìm M :

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$

* Bước 1: chọn $a_1\in A\setminus\{0\}$ có 5 cách.

* Bước 2: chọn 2 trong 5 số còn lại của $A\setminus\{a_1\}$ xếp vào hai vị trí $a_2,a_$ có A_5^2 cách.

Vậy $M=5.A_5^2$ (số).

+ Tìm N

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$, $a_1+a_2+a_3\,\vdots\,3$

Xét các tập con gồm 3 phần tử của tập $A=\{0;1;2;3;4;5\}$, ta thấy chỉ có các tậ sau thỏa điều kiện có tổng các phần tử chia hết cho 3 là:

$B_1=\{0;1;2\}$, $B_2=\{0;1;5\}$, $B_3=\{0;2;4\}$, $B_4=\{1;2;3\}$

$B_5=\{1;3;5\}$, $B_6=\{2;3;4\}$, $B_7=\{3;4;5\}$.

+ Khi $a_1;a_2;a_3\in B_1$ để lập được một số thỏa yêu cầu ta thực hiện theo 2 bước:

- Chọn $a_1\in B_1\setminus\{0\}$ có 2 cách.
- Chọn hai số còn lại xếp vào 2 vị trí $a_1;a_2$ có $2!$ cách

Vậy trong trường hợp này có $2.2!=4$ số thỏa yêu cầu.

+ Tương tự khi $a_1;a_2;a_3\in B_2$ hoặc $a_1;a_2;a_3\in B_3$ mỗi trường hợp cũng có số thỏa yêu cầu.

+ Khi $a_1;a_2;a_3\in B_4$; B_5 ; B_6 ; B_7 mỗi số là một giao hoán của 3 phần tử nê mỗi trường hợp có $3!$ số thỏa yêu cầu.

Vậy : $N=3.4+4.3!=12+24=36$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Do đó số các số thỏa yêu cầu bài toán là : $M-N=100-36=64$ (số).

Bài 16. Ta biết số chia hết cho 4 là số có hai số tận cùng là 00 hoặc hợp thành hai số chia hết cho 4 , nên

a) $\overline{a_1a_2a_3a_4}\,\vdots\,4\Leftrightarrow\overline{a_3a_4}=\overline{12}$ hoặc $\overline{a_3a_4}=\overline{24}$ hoặc $\overline{a_3a_4}=\overline{32}$ hoặc $\overline{a_3a_4}=\overline{44}$

+ Khi $\overline{a_3a_4}=\overline{12}$ để tạo được một số thỏa yêu cầu ta thực hiện liên tiếp 2 bước

- Chọn a_1 có 4 cách.
- Chọn a_2 có 4 cách.

Vậy trường hợp này có $4\cdot4=16$ số.

+ Tương tự khi $\overline{a_3a_4}=\overline{24}$ hoặc $\overline{a_3a_4}=\overline{32}$ hoặc $\overline{a_3a_4}=\overline{44}$ mỗi trường hợp cũng có 16 số.

Vậy số các số cần tìm là: $4.16=64$ số.

b) Vì $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ có các chữ số khác nhau, nên $\overline{a_1a_2a_3a_4}\,\vdots\,4\Leftrightarrow\overline{a_3a_4}=\overline{12}$ hoặc $\overline{a_3a_4}=\overline{24}$ hoặc $\overline{a_3a_4}=\overline{32}$

+ Khi $\overline{a_3a_4}=\overline{12}$ để tạo được một số thỏa yêu cầu ta thực hiện liên tiếp 2 bước

- Chọn a_1 có 2 cách.
- Chọn a_2 có 1 cách.

Vậy trường hợp này có $2.1=2$ số.

+ Tương tự khi $\overline{a_3a_4}=\overline{24}$ hoặc $\overline{a_3a_4}=\overline{32}$ mỗi trường hợp cũng có 2 số.

Vậy số các số cần tìm là : $2+2+2=6$ số.

Bài 17. Mỗi ước số của số a có dạng: $2^i.5^j.7^k$, trong đó

$i\in\{0,1,2,3\}$, $j\in\{0,1,2,3,4\}$, $k\in\{0,1,2\}$

Để có một ước của $a=2^3.5^4.7^2$ ta phải thực hiện liên tiếp 3 bước:

- Chọn $i\in\{0,1,2,3\}$: có 4 cách
- Chọn $j\in\{0,1,2,3,4\}$: có 5 cách
- Chọn $k\in\{0,1,2\}$: có 3 cách

Vậy có tất cả : $4\cdot5\cdot3=60$ (ước số).

Bài 18. Đặt $A=\{0,1,2,3,4,5\}$. Gọi số cần tìm là: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ $(a_1\neq0)$, ta thực hiện theo các bước liên tiếp sau:

+ Ghép hai chữ số 2 và 3 thành một cặp: có 2 cách và coi đó là một số a .

+ Chọn $a_1\in\{a,1,4,5\}$ có 4 cách.

+ Chọn 4 chữ số thuộc $A\setminus\{a_1\}$ xếp vào 4 vị trí còn lại: có $A_4^4=4!$ cách.

Do đó theo quy tắc nhân, ta có: $2\cdot4\cdot4!=192$ (số).

Bài 19. Gọi số cần tìm là: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ $(a_1\neq0)$

Theo giả thiết, ta có: $a_3+a_4+a_5=8$

- *Trường hợp 1:* $a_3,a_4,a_5\in\{1,2,5\}$

- Có 3! cách chọn a_3, a_4, a_5
- Có A_3^6 cách chọn 3 chữ số còn lại

Nên trường hợp này có : $3!.A_6^3 = 720$ (số).

- *Trường hợp 2:* $a_3, a_4, a_5 \in \{1,3,4\}$: Tương tự cũng có $3!.A_6^3 = 720$ (số).

Vậy tất cả có : $2.720 = 1440$ (số)

Bài 20. Đặt $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ $(a_1 \neq 0)$

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}(a_1 + a_2 + a_3) + 1 = a_4 + a_5 + a_6 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 21\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 10 \\ a_4 + a_5 + a_6 = 11\end{cases}$

Đặt $X = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $Y = \{a_4, a_5, a_6\}$

Ta có các trường hợp sau:

* *Trường hợp 1.* $X = \{1,3,6\}, Y = \{2,4,5\}$

- Hoán vị 3 phần tử thuộc X: có 3! cách.
- Hoán vị 3 phần tử thuộc Y: có 3! cách.

Trường hợp này có: $3!.3! = 36$ (số).

* *Trường hợp 2.* $X = \{1,4,5\}, Y = \{2,3,6\}$

Tương tự, có: $3!.3! = 36$ (số).

* *Trường hợp 3.* $X = \{2,3,5\}, Y = \{1,4,6\}$

Tương tự, có: $3!.3! = 36$ (số).

Vậy các số thỏa yêu cầu bài toán là: $3 \cdot 36 = 108$ (số).

Bài 21. Số phải tìm có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, $(a_1 \neq 0)$

- Xét những số dạng: $\overline{1a_2a_3a_4}$
  - Có 5 cách chọn a_4
  - Có A_8^2 cách chọn a_2 và a_3

  Trường hợp này có: $5 \cdot A_8^2 = 280$ (số)
- Xét những số có dạng $\overline{20a_3a_4}$
  - Có 3 cách chọn a_4
  - Có 7 cách chọn $a_3 \Rightarrow$ Có : $3.7 = 21$ (số)

  Trường hợp này có : $3 \cdot 7 = 21$ (số)
- Xét những số có dạng $\overline{210a_4}$, có 3 cách chọn a_4

  Trường hợp này có: có 3 số
- Xét những số có dạng $\overline{213a_4}$, có 4 cách chọn a_4

  Trường hợp này có: có 4 số
- Xét những số dạng $\overline{214a_4}$, có 3 cách chọn a_4.

  Trường hợp này có: có 3 số
- Xét những số dạng $\overline{215a_4}$, có 3 cách chọn a_4

Trường hợp này có : có 3 số

Vậy có tất cả: $280 + 21 + 3 + 4 + 3 + 3 = 314$ (số).

Bài 22. Số cần tìm có dạng : $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ $(a_1 \neq 0)$

- Trường hợp 1: $a_1 = 1$
  - Chọn $a_5 \in \{0,2,4,6\}$: có 4 cách
  - Chọn 3 chữ số còn lại thuộc $A \setminus \{1, a_5\}$: có A_5^3 cách

  Trường hợp này có : $4.A_5^3 = 240$ (số)
- Trường hợp 2: $a_1 = 2$, $a_2 \in \{0,4\}$
  - Có 2 cách chọn a_2
  - Có 2 cách chọn a_5
  - Có A_4^2 cách chọn 2 chữ số còn lại

  Trường hợp này có : $2.2.A_4^2 = 48$ (số)
- Trường hợp 3: $a_1 = 2$, $a_2 \in \{1,3\}$
  - Có 2 cách chọn a_2
  - Có 3 cách chọn a_5
  - Có A_4^2 cách chọn 2 chữ số còn lại

  Trường hợp này có : $2.3.A_4^2 = 72$ (số)

Vậy có tất cả: $240 + 48 + 72 = 360$ (số).

Bài 23. Xét tập $A = \{0,1,2,3,5,6,6,6,7\}$

Hoán vị lặp 10 số trên (trong đó số 6 lặp lại 3 lần) ta được: $\dfrac{10!}{3!} = 604800$ dãy số có dạng thỏa yêu cầu kể cả các các dãy có số 0 đứng đầu.

Mặt khác số các dãy số dạng trên có số 0 đứng đầu là: $\dfrac{9!}{3!} = 60480$

Vậy số các số cần tìm là: $604800 - 60480 = 544320$.

Đáp số: 544320 số.

Bài 24. + Tìm số các số có 5 chữ số khác nhau được tạo từ $A = \{0,1,2,3,4,5\}$.

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

- Bước 1: chọn $a_1 \in A \setminus \{0\}$ có 5 cách.
- Bước 2: chọn 4 số trong 5 số còn lại của $A \setminus \{a_1\}$ xếp vào 4 vị trí còn lại có $A_5^4 = 120$ cách

Suy ra số các số có 5 chữ số khác nhau được tạo từ A là: $5.120 = 600$ (số).

+ Tính tổng các số

Trong 600 số trên mỗi số $0,1,2,3,4,5$ đứng ở hàng đơn vị $600 : 6 = 100$ (lần).

Do đó tổng các số ở hàng đơn vị của 600 số trên là:

$$100(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 100.15 = 1500$$

Lập luận tương tự, ta cũng có tổng các số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn, của 600 số trên đều bằng 1500.

Riêng ở hàng vạn mỗi số $1,2,3,4,5$ đứng $600:5=120$ (lần).

Do đó tổng các số ở hàng vạn của 600 số trên là :

$$120(1+2+3+4+5)=120.15=1800$$

Vậy tổng của 600 số trên là:

$$1500.(1+10+10^2+10^3)+1800.10^4=19\,666\,500.$$

Bài 25. *Đáp số:* Có tất cả: $5!=120$ (số). Tổng của chúng là: 9333240.

Bài 26.

a) Để tạo được một biển số xe, ta thực hiện theo các bước sau:

- *Chọn chữ cái:*
    - ○ Có 26 cách chọn chữ cái thứ nhất
    - ○ Có 26 cách chọn chữ cái thứ hai

$\Rightarrow$ có 26^2 cách chọn hai chữ cái, trong đó có một trường hợp mà cả hai chữ cái đều là chữ O. Suy ra số cách chọn hai chữ cái mà trong đó có ít nhất một chữ cái khác chữ O là: 26^2-1 (cách).

- *Chọn chữ số:* Chọn 4 chữ số từ 10 chữ số: có A_{10}^4 cách

Vậy có tất cả : $(26^2-1).A_{10}^4=3402000$ (biển số xe).

b) Ta thực hiện liên tiếp các bước sau:

- *Chọn chữ cái:* Chọn 2 chữ cái khác nhau: có A_{26}^2 cách.
- *Chọn chữ số:*
    - ○ Chọn một chữ số lẻ thuộc $\{1,3,5,7,9\}$: có 5 cách
    - ○ Xếp chữ số lẻ vừa chọn vào 2 trong 4 vị trí: có C_4^2 cách

      $\Rightarrow$ có $5.C_4^2$ cách chọn hai chữ số lẻ giống nhau
    - ○ Chọn hai chữ số chẵn tùy ý thuộc $\{0,2,4,6,8\}$ xếp vào hai vị trí còn lại: có 5^2 cách $\Rightarrow$ có $5.C_4^2.5^2=30.25=750$ cách chọn 4 chữ số.

Vậy số biển số xe cần tìm dạng này là: $A_{26}^2.750=487500$.

Bài 27. *Đáp số:* Có tất cả : $C_4^2.C_5^3=60$ (cách).

Bài 28.

- Trước hết ta chọn 4 viên bi bất kỳ từ 15 viên bi: có C_{15}^4 cách.
- Tiếp theo ta chọn 4 viên bi có đủ 3 màu:
    - ○ *Trường hợp 1:* Chọn một bi đỏ, một bi trắng, 2 bi vàng

      Có $C_4^1C_5^1C_6^2=300$ (cách).
    - ○ *Trường hợp 2:* một bi đỏ, 2 bi trắng, một bi vàng

      Có $C_4^1C_5^2C_6^1=240$ (cách).
    - ○ *Trường hợp 3:* 2 bi đỏ, một bi trắng, một bi vàng

      Có $C_4^2C_5^1C_6^1=180$ (cách).

Vậy số cách chọn 4 viên bi có đủ 3 màu là: $300+240+180=720$ (cách).

Suy ra số cách chọn 4 viên bi không đủ cả 3 màu là: $C_{15}^4-720=645$ (cách).

Bài 29. * *Trường hợp 1:* 1 học sinh nữ và 5 học sinh nam

- Chọn 1 học sinh nữ : có 7 cách
- Chọn 5 học sinh nam : có 1 cách

$\Rightarrow$ Có $7.1=7$ (cách)

* *Trường hợp 2:* 2 học sinh nữ và 4 học sinh nam

- Chọn 2 học sinh nữ : có C_7^2 cách
- Chọn 4 học sinh nam : có C_5^4 cách

$\Rightarrow$ Có $C_7^2.C_5^4=105$ (cách)

* *Trường hợp 3:* 3 học sinh nữ và 3 học sinh nam

- Chọn 2 học sinh nữ : có C_7^3 cách
- Chọn 4 học sinh nam : có C_5^3 cách

$\Rightarrow$ Có $C_7^3.C_5^3=350$ (cách)

Vậy có tất cả : $7+105+350=462$ (cách).

Bài 30. Chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ nhất : Có $C_{12}^4.C_3^1=1485$ cách

Chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ hai : Có $C_8^4.C_2^1=140$ cách

Chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ ba : Có 1 cách

Vậy có tất cả : $1485\cdot140\cdot1=207\,900$ (cách).

Bài 31. * Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh là: $C_{12}^4=495$

* Số cách chọn 4 học sinh có trong cả 3 lớp:

+ Chọn 2 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B, 1 học sinh lớp C :

Có $C_5^2C_4^1C_3^1=120$ (cách)

+ Chọn 2 học sinh lớp B, 1 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp C :

Có $C_5^1C_4^2C_3^1=90$ (cách)

+ Chọn 2 học sinh lớp C, 1 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B :

Có $C_5^1C_4^1C_3^2=60$ (cách)

$\Rightarrow$ Số cách chọn 4 học sinh trong cả 3 lớp là:

$$120+90+60=270 \text{ (cách).}$$

Vậy số cách chọn 4 học sinh thuộc không quá 2 trong 3 lớp là:

$$495-270=225 \text{ (cách).}$$

Bài 32. * *Trường hợp 1:* Tổ 1 có 3 nữ và 7 nam; tổ 2 có 2 nữ và 9 nam; tổ 3 có 2 nữ và 10 nam

Có $C_7^3.C_{26}^7$ cách chia tổ 1

Có $C_4^2.C_{19}^9$ cách chia tổ 2

Có $C_2^2.C_{10}^{10}$ cách chia tổ 3

Trường hợp này có: $C_7^3\,C_{26}^7\,C_4^2\,C_{19}^9\,C_2^2\,C_{10}^{10}=12760912164000$ (cách)

* *Trường hợp 2:* Tổ 1 có 2 nữ và 8 nam; tổ 2 có 3 nữ và 8 nam; tổ 3 có 2 nữ và 10 nam

Trường hợp này có: $C_7^2\,C_{26}^8\,C_5^3\,C_{18}^8\,C_2^2\,C_{10}^{10}=14356026184500$ (cách)

* *Trường hợp 3:* Tổ 1 có 2 nữ và 8 nam; tổ 2 có 2 nữ và 9 nam; tổ 3 có 3 nữ và 9 nam

Trường hợp này có: $C_7^2\ C_{26}^8\ C_5^2\ C_{18}^9\ C_3^3\ C_9^9 = 15951140205000$ (cách)

Vậy tổng số cách chia tổ là:

$$12760912164000 + 14356026184500$$
$$+15951140205000 = 43068078553500.$$

Bài 33. Có tất cả: $C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2 + C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1 + C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1 = 56875$ (đề kiểm tra).

Bài 34. a) Có tất cả: 2! 2! 3! = 24 (cách).

b) Có tất cả : 4!. 2! = 48 (cách).

Bài 35. a) Tất cả có : 518400 + 518400 = 1036800 (cách).

b) Có 12.6.10.5.8.4.6.3.4.2.2.1 = 33177600 (cách).

Bài 36. Có tất cả 144 (cách)

Bài 37. Giá trị cần tìm là: $n = 20$.

Bài 38. *Nhận xét.* Qua 3 điểm trên cạnh *CD* cũng như *n* điểm trên cạnh *AD* không tạo thành một tam giác.Do đó, số tam giác được tạo nên từ 3 điểm không thẳng hàng trong số (n + 6) điểm đã cho là $C_{n+6}^3 - \left(C_3^3 + C_n^3\right)$ (tam giác)

Theo đề bài ta có: $C_{n+6}^3 - \left(C_3^3 + C_n^3\right) = 439$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 3)$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+6)!}{3!(n+3)!} - \left(1 + \frac{n!}{3!(n-3)!}\right) = 439$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(n+4)(n+5)(n+6) - \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n = 440$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 140 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -14 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 10 \text{ do } (n \in \mathbb{N},\ n \geq 3).$$

Vậy $n = 10$.

Bài 39. a) Ta thực hiện theo 2 bước liên tiếp sau:

+ Xếp 3 viên bi đỏ vào 3 ô trống : có A_7^3 cách (do bi đỏ có bán kính khác nhau, nên có tính đến thứ tự).

+ Xếp 3 viên bi xanh vào 4 ô còn lại: C_4^3 cách (do các viên bi xanh giống nhau).

Vậy số cách xếp khác nhau là: $A_7^3 \cdot C_4^3 = 840$ cách.

b) Trước hết ta cho 3 bi đỏ và 3 bi xanh dính vào nhau coi như còn 2 đối tượng xếp vào 3 vị trí (có tính đến thứ tự), nên có : $A_3^2 = 6$ cách

Do các bi đỏ khác nhau nên mỗi hoán vị của 3 viên là một cách xếp: có $3! = 6$ cách.

Do đó, số cách xếp khác nhau sao cho 3 viên bi đỏ xếp cạnh nhau, 3 viên bi xanh xếp cạnh nhau là : $6 \cdot 3! = 36$ cách.

Bài 40. Trước hết ta chọn ra 2 trong 5 học sinh thi khối C có : C_5^2 cách

Bước 2 ta phải chọn ra 13 học sinh khối A và khối B ,trong đó có ít nhất 5 học sinh khối A

Ta biết nếu chọn 13 học sinh trong 25 học sinh thì có: C_{25}^{13} cách.

Nếu chọn 10 học sinh khối B và 3 học khối A thì có: $C_{10}^{10} \cdot C_{15}^3$ cách

Nếu chọn 9 học sinh khối B và 4 học khối A thì có: $C_{10}^9 \cdot C_{15}^4$ cách

Do đó , chọn ra 13 học sinh khối A và khối B ,trong đó có ít nhất 5 học sinh khối A có: $C_{25}^{13} - \left(C_{10}^{10} \cdot C_{15}^3 + C_{10}^9 \cdot C_{15}^4\right)$ cách

Vậy số cách chọn thỏa mãn đề ra là:

$$C_5^2 \cdot \left[C_{25}^{13} - \left(C_{10}^{10} \cdot C_{15}^3 + C_{10}^9 \cdot C_{15}^4\right)\right] = 51.861.950 \text{ cách.}$$

Bài 41. $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4}$

$$= \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) + 3\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + 3\left(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}\right) + \left(C_n^{k-3} + C_n^{k-4}\right)$$

$$= C_{n+1}^k + 3C_{n+1}^{k-1} + 3C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3} = \cdots = C_{n+4}^k.$$

Bài 42. $2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3}$

$$= \left(C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right) + \left(C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3}\right)$$

$$= \cdots\cdots = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}.$$

Bài 43. Ta có : $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k} + \dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \dfrac{n+1}{n+2} \cdot \dfrac{k!(n+1-k)! + (k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}$

$$= \frac{1}{n+2} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!}\left[(n+1-k) + (k+1)\right] = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k}.$$

Bài 44. Đặt $a_k = C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n$, $(0 \leq k \leq n)$

Ta chứng minh rằng $a_0 > a_1 > a_2 \cdots > a_n$ (1)

Thật vậy : $a_k > a_{k+1}$, $0 \leq k \leq n-1$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n+k)!}{n!.(n+k)!} \cdot \frac{(2n-k)!}{n!.(n-k)!} > \frac{(2n+k+1)!}{n!.(n+k+1)!} \cdot \frac{(2n-k-1)!}{n!.(n-k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-k}{n-k} > \frac{2n+k+1}{n+k+1}$$

$$\Leftrightarrow (2n-k)(n+k+1) > (2n+k+1)(n-k)$$

$\Leftrightarrow 2nk + n > 0$ (luôn đúng), suy ra (1) cũng luôn đúng

Vậy, ta có: $a_k = C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n < a_0 = \left(C_{2n}^n\right)^2$ (đpcm).

Bài 45. *Đáp số* : a) $A = 4$; b) $B = (n+1)(n+2)+1$;

$$\text{c) } C = n + (n-1) + \cdots + (n-k+1) + \cdots + 1 = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Do } k\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = k\frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = k \cdot \frac{n-k+1}{k} = n-k+1,\ (0 \leq k \leq n).$$

Bài 46. a) Nghiệm của phương trình: $x = 4$;

b) Nghiệm của phương trình: $x = 7$;

c) Nghiệm của phương trình: $x = 2$;

d) Phương trình vô nghiệm;

e) Nghiệm của phương trình: $x = 3 \vee x = 4$;

f) Phương trình vô nghiệm;

g) Nghiệm của phương trình: $x = 3$;

h) Nghiệm của phương trình: $x = 5$.

Bài 47. Điều kiện: $2 \le x \le 3, (x \in \mathbb{N})$

$$A_3^x.C_x^2 - 6C_x^2 - 3A_3^x + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow A_3^x\left(C_x^2 - 3\right) - 6\left(C_x^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left(C_x^2 - 3\right)\left(A_3^x - 6\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C_x^2 = 3 \\ A_3^x = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x!}{2!(x-2)!} = 3 \\ \dfrac{3!}{(3-x)!} = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x-1) = 6 \\ (3-x)! = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ hay } x = -2 \\ x = 3 \text{ hay } x = 2 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được: $x = 2$ hay $x = 3$

* Ta có thể giải nhanh hơn như sau: Từ điều kiện $2 \le x \le 3, x \in \mathbb{N}$, suy ra $x = 2$ hay $x = 3$, thử vào phương trình ta thấy chúng đều thỏa, vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 2$ hay $x = 3$.

Bài 48. a) Nghiệm của bất phương trình: $n \ge 11, (n \in \mathbb{N})$.

b) $\begin{cases} -2 < n < 11 \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{5;6;7;8;9;10\}$

c) $3 \le n \le 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n = 4 \end{array}\right.$

d) Giá trị cần tìm là: $k = 1004$ hay $k = 1005$.

e) $\begin{cases} k \le n \\ (n+5)(n+4)(n-k+1) \le 0 \end{cases}$

- Xét với $n \ge 4$: bất phương trình vô nghiệm.
- Xét $n \in \{0,1,2,3\}$ ta được các nghiệm là:

$$(0;0), (1;0), (1;1), (2;2), (3;3).$$

f) $n \ge 6, (n \in \mathbb{N})$.

Bài 49. Giải các hệ phương trình.

a) $\begin{cases} x = 18 \\ y = 8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$;

g) $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^{m} : C_{n+1}^{m-1} = 5:5:3 \Leftrightarrow \begin{cases} C_{n+1}^{m+1} = C_{n+1}^{m} \\ 3C_{n+1}^{m} = 5C_{n+1}^{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 6 \end{cases}$.

§2. NHỊ THỨC NEWTON

Bài 1. Xét $(1+x)^{m+n} = C_{m+n}^0 + C_{m+n}^1 x + \cdots + C_{m+n}^k x^k + \cdots + C_{m+n}^{m+n} x^{m+n}$, suy ra hệ số của x^k là C_{m+n}^k

Mà $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n$

$$= \left(C_m^0 + C_m^1 x + \cdots + C_m^k x^k + \cdots + C_m^m x^m\right)\left(C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^n x^n\right)$$

Khi nhân hai đa thức trên ta thấy số hạng chứa x^k có dạng:

$$\left(C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \cdots + C_m^m C_n^{k-m}\right) x^k$$

Hai đa thức trên đồng nhất nên hệ số của số hạng chứa x^k phải bằng nhau, tức là:

$$C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \cdots + C_m^m C_n^{k-m} = C_{m+n}^k \text{ (đpcm).}$$

Bài 2. a) Đáp số: $S_1 = 62$.

b) Đáp số: $S_2 = \frac{1}{2}(3^{2n} + 1)$.

c) Đáp số: $S_3 = \frac{1}{2}$.

d) Đáp số: $S_4 = \frac{1}{2} C_{2010}^{1005}$.

e) Đáp số: $S_5 = \dfrac{2^{2009}\left(2^{2009} - 1\right)}{2} = 2^{2008}\left(2^{2009} - 1\right)$.

Bài 3. Xét: $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n x^n$ (*)

Thế $x = \frac{1}{3}$ vào (*), ta được:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = C_n^0 - \frac{1}{3} C_n^1 + \frac{1}{3^2} C_n^2 - \frac{1}{3^3} C_n^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{3^n} C_n^n$$

$$\Leftrightarrow 3^n\left[C_n^0 - \frac{1}{3} C_n^1 + \frac{1}{3^2} C_n^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{3^n} C_n^n\right] = 2^n \text{ (đpcm).}$$

Bài 4. *Đáp số:* a) $T_3 = C_{10}^2 = 45$; b) $T_4 = -C_5^3 = -10$; c) $T_5 = C_6^4 = 15$.

Bài 5. *Đáp số:* $a_9 = 3033$.

Bài 6. *Đáp số:* a) $T_4 = 4536$, $T_{10} = 8$; b) $T_1 = 27$, $T_3 = 2005$, $T_5 = 10125$, $T_7 = 3375$; c) $T_7 = C_{36}^6.3^6.7^2$, $T_{22} = C_{36}^{21}.3^3.7^7$, $T_{37} = C_{36}^{36}.7^{12}$; d) 32.

Bài 7. *Đáp số:* $n = 8$, $T_3 = \frac{1792}{243}x^4$.

Bài 8. $(x+1)^{10}(x+2) = (x+1)^{11} + (x+1)^{10}$

$$= x^{11} + a_1 x^{10} + \cdots + a_5 x^6 + \cdots + a_{11}$$

+ Khi khai triển $(x+1)^{10}$ số hạng tổng quát là: $T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k}$ nên T_{k+1} chứa $x^6 \Leftrightarrow 10 - k = 6 \Leftrightarrow k = 4$. Vậy hệ số của x^6 khi khai triển $(x+1)^{10}$ là: C_{10}^4

+ Khi khai triển $(x+1)^{11}$ số hạng tổng quát là: $T_{k+1} = C_{11}^k x^{11-k}$ nên T_{k+1} chứa $x^6 \Leftrightarrow 11 - k = 6 \Leftrightarrow k = 5$. Vậy hệ số của x^6 khi khai triển $(x+1)^{11}$ là: C_{11}^5

Vậy $a_5 = C_{10}^4 + C_{11}^5 = 672$.

Bài 9. Ta có : $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$

$$\Leftrightarrow \left(C_{n+3}^{n} + C_{n+3}^{n+1}\right) - C_{n+3}^{n} = 7(n+3) \Leftrightarrow C_{n+3}^{n+1} = 7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+3)!}{2!(n+1)!} = 7(n+3) \Leftrightarrow n+2=14 \Leftrightarrow n=12.$$

Khi đó $P(x) = \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^{12}$

Số hạng tổng quát khi khai triển $P(x)$: $T_{k+1} = C_{12}^{k}\left(x^{-3}\right)^{12-k}.\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{k} = C_{12}^{k}x^{\frac{11k}{2}-36}$

T_{k+1} chứa x^8 $\Leftrightarrow \frac{11k}{2} - 36 = 8 \Leftrightarrow k = 8$

Vậy hệ số của x^8 là : $C_{12}^{8} = 495$.

Bài 10. Xét nhị thức: $P(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$

Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_7^k.\left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}.\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{k} = C_7^k.x^{\frac{7}{3}-\frac{7k}{12}}$

Số hạng không chứa *x* là số hạng ứng với k thỏa: $\frac{7}{3} - \frac{7k}{12} = 0 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy số hạng không chứa *x* là: $C_7^4 = 35$.

Bài 11. Xét nhị thức:

$$(1-1)^{2n+1} = C_{2n+1}^{0} - C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{2} - C_{2n+1}^{3} + C_{2n+1}^{4} - C_{2n+1}^{5} + \cdots + C_{2n+1}^{2n} - C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow 0 = C_{2n+1}^{0} - C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{2} - C_{2n+1}^{3} + C_{2n+1}^{4} - C_{2n+1}^{5} + \ldots + C_{2n+1}^{2n} - C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow C_{2n+1}^{0} + C_{2n+1}^{2} + C_{2n+1}^{4} + \ldots + C_{2n+1}^{2n} = C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{3} + C_{2n+1}^{5} + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} \quad (1)$$

$$(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^{0} + C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{2} + C_{2n+1}^{3} + C_{2n+1}^{4} + C_{2n+1}^{5} + \cdots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2\left(C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{3} + C_{2n+1}^{5} + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1}\right) \quad \text{(do (1))}$$

$$\Leftrightarrow C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{3} + C_{2n+1}^{5} + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n}$$

Theo giả thiết $\Rightarrow 2^{2n} = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5$.

Với $n = 5$, ta có : $(2-3x)^{10}$

Số hạng tổng quát : $T_{k+1} = C_{10}^{k}.2^{10-k}(-3x)^{k} = C_{10}^{k}.2^{10-k}(-3)^{k}x^{k}$

Số hạng chứa x^7 ứng với $k = 7$

Vậy hệ số của x^7 là : $-C_{10}^{7}2^{3}.3^{7} = -2099520$.

Bài 12. Ta có:

$$2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^{0} + C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{2} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n+1} = C_{2n+1}^{0} + C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{2} + \cdots + C_{2n+1}^{n} + C_{2n+1}^{n} + \cdots + C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{0}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2\left(C_{2n+1}^{0} + C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{2} + \ldots + C_{2n+1}^{n}\right), \text{ (do } C_n^k = C_n^{n-k}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n} = C_{2n+1}^{0} + C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{2} + \ldots + C_{2n+1}^{n}.$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n} = 1 + 2^{20} - 1 \Leftrightarrow 2^{2n} = 2^{20} \Leftrightarrow 2n = 20 \Leftrightarrow n = 10$$

Khi đó: $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-k}.\left(x^7\right)^{k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k}x^{11k-40}$

Hệ số của x^{37} là C_{10}^{k}, ứng với k thỏa mãn: $11k - 40 = 37 \Leftrightarrow k = 7$

Vậy hệ số của x^{37} là: $C_{10}^{7} = 120$.

Bài 13. Ta có : $A_n^3 + 2A_n^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 2.\frac{n!}{(n-2)!} = 100$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n-1).n + 2(n-1).n = 100$$

$$\Leftrightarrow n^2(n-1) = 100 \Leftrightarrow n^3 - n^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow n = 5$$

Khi khai triển $(1+3x)^{10}$ số hạng tổng quát là : $T_{k+1} = C_{10}^{k}3^{k}.x^{k}$ nên T_{k+1} chứa $x^5 \Leftrightarrow k = 5$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^5 khi khai triển nhị thức Newton của $(1+3x)^{10}$ là : $C_{10}^{5}.3^{5} = 61236$.

Bài 14. Đáp số : $C_5^4(-2)^4 + C_{10}^{3}3^{3} = 3320$.

Bài 15. Ta có : $P(x) = \left[1 + x^2(1-x)\right]^8 = \left(1 + x^2 - x^3\right)^8 = \left[1 + \left(x^2 - x^3\right)\right]^8$

$$= \sum_{k=0}^{8} C_8^k.\left(x^2 - x^3\right)^k = \sum_{k=0}^{8} C_8^k.\sum_{m=0}^{k} C_k^m\left(x^2\right)^{k-m}\left(-x^3\right)^m = \sum_{k=0}^{8}\sum_{m=0}^{k} C_8^kC_k^m.(-1)^m.x^{2k+m}$$

Do đó , số hạng chứa x^8 khi

$$\Rightarrow m = 8 - 2k, (0 \le m \le k \le 8) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \Rightarrow k = 4 \\ m = 2 \Rightarrow k = 3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $P(x)$ thành đa thức là :

$$(-1)^0C_8^4.C_4^0 + (-1)^2C_8^3.C_3^2 = 238.$$

Bài 16. Khai triển Newton $P(x)$, ta được:

$P(x) = \left[(3x-1) + 2x^2\right]^9$

$$= C_9^0(3x-1)^9 + C_9^1(3x-1)^8.\left(2x^2\right) + C_9^2(3x-1)^7\left(2x^2\right)^2 + \cdots + C_9^9\left(2x^2\right)^9$$

Nhìn vào khai triển trên ta thấy x^3 chỉ có thể xuất hiện khi khai triển hai số hạng đầu $C_9^0(3x-1)^9 + C_9^1(3x-1)^8.\left(2x^2\right)$, vì các số hạng thứ ba trở đi bậc của *x* luôn lớn hơn 3.

Hệ số của x^3 trong khai triển của $C_9^0(3x-1)^9$ là: $C_9^0.C_9^6.3^3$.

Hệ số của x^3 trong khai triển của $C_9^1(3x-1)^8.\left(2x^2\right)$ là: $-C_9^1.C_8^7.6$.

Vì vậy , hệ số của x^3 trong khai triển $P(x)$ thành đa thức là:

$$C_9^0.C_9^6.3^3 - C_9^1.C_8^7.6 = 1836.$$

Cách khác : $P(x)=\left(2x^2+3x-1\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k\left(2x^2+3x\right)^{9-k}(-1)^k$

$$=\sum_{k=0}^{9}(-1)^k C_9^k\sum_{m=0}^{9-k}C_{9-k}^m\left(2x^2\right)^{9-k-m}(3x)^m$$

$$=\sum_{k=0}^{9}\sum_{m=0}^{9-k}(-1)^k C_9^k.C_{9-k}^m 2^{9-k-m}.3^m.x^{18-2k-m}$$

Do đó , hệ số của x^3 là : $(-1)^k C_9^k.C_{9-k}^m 2^{9-k-m}3^m$

Khi $18-2k-m=3\Leftrightarrow 2k+m=15$, $\left(\begin{cases}0\le k\le 9\\ m\le 9-k\end{cases}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1,k=7\\ m=3,k=6\end{array}\right.$

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển $P(x)$ thành đa thức là:

$$(-1)^7C_9^7.C_2^1 2.3+(-1)^6C_9^6C_3^3 2^0 3^3=1836.$$

Bài 17. Ta có : $P(x)=\left(1-2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^7=\left[1+\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-2\sqrt{x}\right)\right]^7$

$$=\sum_{k=0}^{7}C_7^k\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-2\sqrt{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{7}C_7^k\sum_{m=0}^{k}C_k^m\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{k-m}\left(-2x^{\frac{1}{2}}\right)^m$$

$$=\sum_{k=0}^{7}\sum_{m=0}^{k}C_7^k.C_k^m(-2)^m x^{-\frac{2}{3}k+\frac{7}{6}m}$$

Do đó , hệ số của $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ là : $C_7^k.C_k^m(-2)^m$

Khi $-\dfrac{2}{3}k+\dfrac{7}{6}m=-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 4k-7m=4$, $(0\le m\le k\le 7)\Rightarrow m=0,k=1$

Vậy hệ số của $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ trong khai triển $P(x)$ thành đa thức là : $C_7^1.C_1^0(-2)^0=7$.

Bài 18. Ta có : $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=55\Leftrightarrow C_{n+1}^{n-1}=55$ (Điều kiện : $n\ge 1,n\in\mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow\frac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!}=55\Leftrightarrow n(n+1)=110$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-110=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=10\\ n=-11\end{array}\right.\Leftrightarrow n=10$$

Số hạng tổng quát khi khai triển $\left(\sqrt[7]{8}+\sqrt[3]{5}\right)^{10}$ là:

$$T_{k+1}=C_{10}^k\left(\sqrt[7]{8}\right)^{10-k}\left(\sqrt[3]{5}\right)^k=C_{10}^k 8^{\frac{10-k}{7}}.5^{\frac{k}{3}}$$

Số hạng T_{k+1} là số nguyên $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{10-k}{7}\in\mathbb{N}\\ \dfrac{k}{3}\in\mathbb{N}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10-7m=k\\ k=3n\\ k,m,n\in\mathbb{N}\\ 0\le k\le 10\end{cases}\Leftrightarrow k=3$

Vậy số hạng cần tìm là: $T_4=C_{10}^3.8^1.5^1=4800$.

Bài 19. Xét nhị thức: $(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ (1)

Thế $x=1$ vào (1), ta có: $3^n=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n=729\Leftrightarrow 3^n=3^6\Leftrightarrow n=6$

Khi đó: $(1+2x)^6=\sum_{k=0}^{6}C_6^k2^kx^k\Rightarrow a_k=C_6^k2^k$,$(0\le k\le 6)$

Ta có: $a_k=C_6^k2^k$, $a_{k+1}=C_6^{k+1}2^{k+1}\Rightarrow\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{k!(6-k)!}{(k+1)!(5-k)!}.2=\dfrac{2(6-k)}{k+1}$

- $a_{k+1}>a_k\Leftrightarrow 2(6-k)>k+1\Leftrightarrow k<\dfrac{11}{3}\Leftrightarrow k\le 3$ (do $k\in\mathbb{N}$)

  Tức là: $a_1<a_2<a_3<a_4$

- $a_{k+1}<a_k\Leftrightarrow 2(6-k)<k+1\Leftrightarrow k>\dfrac{11}{3}\Rightarrow k\ge 4$ (do $k\in\mathbb{N}$)

  Tức là : $a_4>a_5>a_6$

Vậy số lớn nhất trong các số : $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ là $a_4=C_6^4\cdot 2^4=240$.

Bài 20. Đặt $P(x)=(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right)=2^n=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=4096=2^{12}\Rightarrow n=12$$

Vì $(1+2x)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k2^kx^k\Rightarrow a_k=C_{12}^k2^k,a_{k+1}=C_{12}^{k+1}2^{k+1}$,$(0\le k\le 12)$

$$\Rightarrow\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{C_{12}^{k+1}2^{k+1}}{C_{12}^{k+1}2^{k+1}}=\frac{2(12-k)}{k+1}$$

- $a_{k+1}>a_k\Leftrightarrow 2(12-k)>k+1\Leftrightarrow k<\dfrac{23}{3}\Rightarrow k\le 7$ (do $k\in\mathbb{N}$)

  Nên $a_0<a_1<a_2<\cdots<a_8$

- $a_{k+1}<a_k\Leftrightarrow 2(12-k)<k+1\Leftrightarrow k>\dfrac{23}{3}\Rightarrow k\ge 8$ (do $k\in\mathbb{N}$)

  Nên $a_8>a_9>a_{10}>\cdots>a_{12}$.

Vậy số lớn nhất trong các số : $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ là $a_8=2^8C_{12}^8=126720$.

Bài 21. * Chứng minh rằng $a_2<a_3$

Ta có : $(2+x)^{100}=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k2^{100-k}.x^k\Rightarrow a_k=C_{100}^k2^{100-k}$

Ta có: $a_2<a_3\quad\Leftrightarrow C_{100}^2 2^{98}<C_{100}^3 2^{97}$

$$\Leftrightarrow \frac{100!}{2!98!}.2^{98} < \frac{100!}{3!97!}.2^{97}$$

$$\Leftrightarrow 99.100.2^{97} < 98.33.100.2^{96} \Leftrightarrow 3 < 49$$ (luôn luôn đúng)

Vậy : $a_2 < a_3$ (đpcm).

* Tìm $k \in [0;99]$ để $a_k < a_{k+1}$

Ta có: $a_k = C_{100}^{k} 2^{100-k}$, $a_{k+1} = C_{100}^{k+1} 2^{99-k}$

Do đó: $a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow C_{100}^{k} 2^{100-k} < C_{100}^{k+1} 2^{99-k}$

$$\Leftrightarrow \frac{100!}{k!(100-k)!}.2^{100-k} < \frac{100!}{(k+1)!(99-k)!}.2^{99-k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{100-k} < \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow 2(k+1) < 100-k \Leftrightarrow k < \frac{98}{3}$$

Mà $k \in [0;99] \Rightarrow 0 \le k \le 32$, $(k \in \mathbb{N})$.

Bài 22. Ta có : $(x^2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2(n-k)}$; $(x+2)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^{n-m} 2^m$

$$\Rightarrow (x^2+1)^n (x+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2(n-k)} \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^{n-m} 2^m = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} C_n^k C_n^m 2^m . x^{3n-2k-m}$$

Trong khai triển trên lũy thừa của *x* là $3n-3$ khi

$$3n-2k-m = 3n-3 \Leftrightarrow 2k+m = 3, \left(k \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1, m=1 \\ k=0, m=3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ số của x^{3n-3} là : $a_{3n-3} = C_n^1 . C_n^1 .2 + C_n^0 . C_n^3 .2^3$

Theo đề bài ta có: $a_{3n-3} = C_n^1 . C_n^1 .2 + C_n^0 . C_n^3 .2^3 = 26n$

$$\Leftrightarrow n.n + 4.\frac{n!}{3!(n-3)!} = 13n \Leftrightarrow n^2 + \frac{2}{3}(n-2)(n-1)n = 13n$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow n=5.$$

Vậy giá trị cần tìm là : $n=5$.

Bài 23. Đáp số : $n=10$.

Bài 24. Ta có : $C_n^3 = 5.C_n^1$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 5\frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{5}{(n-2)(n-1)}$$

$$n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=7 \\ n=-4 \Rightarrow n=7 \end{array}\right.$$

Trong khai triển trên số hạng thứ tư là : $C_n^3 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-3} \cdot \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 20n$

$$\Rightarrow C_7^3 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4 \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 20 \cdot 7$$

$$\Leftrightarrow C_7^3 2^{2x-2}.2^{-x} = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x-2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy ta có : $n=7$, $x=4$.

Bài 25. Gọi đường chéo của đa giác đều đi qua tâm của (O) là đường chéo lớn.

Số đường chéo lớn của đa giác đều 2*n* đỉnh là *n*.

Hai đường chéo lớn của đa giác đều tạo thành một hình chữ nhật.

Do đó, số hình chữ nhật được tạo thành từ 2*n* đỉnh của đa giác đều là: C_n^2

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác đều là: C_{2n}^3

Theo giả thiết, ta có : $C_{2n}^3 = 20C_n^2$

$$\Leftrightarrow \frac{2n!}{3!(2n-3)!} = 20.\frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20.\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n=8$$

Vậy giá trị cần tìm là: $n=8$.

§3. XÁC SUẤT

Bài 1. a) $\Omega = \{(N,N);(N,S);(S,N);(S,S)\}$.

b) $\Omega_A = \{(N,N);(S,N)\}$, $\Omega_B = \{(N,S);(S,N)\}$.

c) $|\Omega| = 4$; $|\Omega_A| = 2$; $|\Omega_B| = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$.

Bài 2. $|\Omega| = 6^3 = 216$.

Ta biết $8 = 1+1+6 = 1+2+5 = 1+3+4 = 2+3+3 = 2+2+4$

$$\Rightarrow \Omega_A = \{(1,1,6);(1,6,1);(6,1,1);(1,2,5);(1,5,2);\cdots;(4,2,2)\}$$

$$\Rightarrow |\Omega_A| = 3+3!+3!+3+3 = 21 \Rightarrow P(A) = \frac{21}{216}.$$

Bài 3. $|\Omega| = 6^2 = 36$.

a) $|\Omega_A| = 11 \Rightarrow P(A) = \frac{11}{36}$; $|\Omega_B| = 10 \Rightarrow P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

b) $\Omega_C = \{(1,4);(4,1);(2,5);(5,2);(3,6);(6,3)\}$

$$\Rightarrow |\Omega_C| = 6 \Rightarrow P(C) = {}^1\!/_6.$$

Bài 4. $|\Omega| = 35$.

a) $|\Omega_A| = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{7}$.

b) $|\Omega_B| = 10 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{7}$.

c) $|\Omega_C| = 11 \Rightarrow P(C) = \frac{11}{35}$.

Bài 5. $|\Omega| = C_{20}^5 = 15504$; $|\Omega_A| = C_6^5 = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{15504} \approx 0,0004$.

Bài 6. $|\Omega| = C_{16}^3 = 560$.

a) $|\Omega_A| = C_3^3 = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{560} \approx 0,0018$.

b) $|\Omega_B| = C_{13}^3 = 286 \Rightarrow P(B) = \frac{286}{560} \approx 0,5107$.

c) $|\Omega_C| = C_7^1.C_6^1C_3^1 = 126 \Rightarrow P(C) = \frac{126}{560} = 0,225$.

d) $|\Omega_D| = C_7^1.C_6^2 + C_7^1C_3^2 + C_7^1.C_6^1C_3^1 = 252 \Rightarrow P(D) = \frac{252}{560} = 0,45$.

e) $|\Omega_E| = C_7^2.C_6^1 + C_7^2C_3^1 = 189 \Rightarrow P(E) = \frac{189}{560} = 0,3375$.

Bài 7. a) $|\Omega| = C_{20}^3 = 1140$

i) $|\Omega_A| = C_7^3 = 35 \Rightarrow P(A) = \frac{35}{1140} \approx 0,0307$.

ii) $|\Omega_B| = C_{13}^3 = 286 \Rightarrow P(B) = \frac{286}{1140} \approx 0,2509$.

iii) $|\Omega_C| = C_9^1.C_7^1C_4^1 = 252 \Rightarrow P(B) = \frac{252}{1140} \approx 0,2211$.

b) $|\Omega| = C_{20}^4 = 4845$

i) $|\Omega_A| = C_9^1.C_{11}^3 = 1485 \Rightarrow P(A) = \frac{1485}{4845} \approx 0,3065$.

ii) $|\Omega_B| = C_9^2.C_{11}^2 = 1980 \Rightarrow P(B) = \frac{1980}{4845} \approx 0,4087$.

c) $|\Omega| = C_{20}^{10} = 184756$

$|\Omega_C| = C_9^5.C_7^3C_4^2 = 26460 \Rightarrow P(B) = \frac{26460}{184756} \approx 0,1432$.

Bài 8. $|\Omega| = 12^{12}$; $|\Omega_A| = 12! \Rightarrow P(A) = \frac{12!}{12^{12}} \approx 0,00005$.

Bài 9. $|\Omega| = C_9^5 = 126$.

a) $|\Omega_A| = C_6^2 = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{15}{126} \approx 0,1190$.

b) $|\Omega_B| = C_6^4 + C_6^4 + C_6^4 = 45 \Rightarrow P(B) = \frac{45}{126} \approx 0,3571$.

c) $|\Omega_C| = C_6^5 = 6 \Rightarrow P(C) = \frac{6}{126} \approx 0,0476$.

Bài 10. $|\Omega| = 30$

a) $|\Omega_A| = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$.

b) $|\Omega_B| = 15 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$.

c) $|\Omega_C| = 10 \Rightarrow P(C) = \frac{1}{3}$.

d) $|\Omega_D| = 5 \Rightarrow P(D) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

Bài 11. $|\Omega| = C_{10}^1.C_{10}^1 = 100$.

a) $|\Omega_A| = C_7^1.C_6^1 + C_3^1.C_4^1 = 54 \Rightarrow P(A) = \frac{54}{100} = 0,54$.

b) $|\Omega_B| = C_7^1.C_6^1 + C_3^1.C_4^1 + C_3^1.C_6^1 = 72 \Rightarrow P(B) = \frac{72}{100} = 0,72$.

Bài 12. $|\Omega| = 10^6$.

a) $|\Omega_A| = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{10^5} = 0,00001$.

b) $|\Omega_B| = 9 \Rightarrow P(B) = \frac{9}{10^5} = 0,00009$.

Bài 13. $|\Omega| = C_{10}^6 = 210$.

a) $|\Omega_A| = C_6^6 = 11 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{210} \approx 0,0048$.

b) $|\Omega_B| = C_6^4.C_4^2 = 90 \Rightarrow P(B) = \frac{90}{210} \approx 0,4286$.

c) $|\Omega_C| = C_4^2.C_6^4 + C_4^3.C_5^3 + C_4^4.C_6^2 = 185 \Rightarrow P(C) = \frac{185}{210} \approx 0,8810$.

Bài 14. $|\Omega| = 4^4 = 256$;

Để được một kết quả thuận lợi, ta phải thực hiện liên tiếp các bước sau:

+ Chọn 2 toa tầu có người. Có $C_4^2 = 6$ cách chọn.

+ Chọn một toa có 3 người và một toa có 1 người. Có 2 cách chọn.

+ Ứng với cách chọn toa (một toa 3 người, một toa 1 người), ta chọn 3 trong 4 người lên toa có 3 người và người còn lại lên toa 1 người. Có $C_4^3.1$ cách chọn.

Vậy $|\Omega_A| = C_4^2.2.C_4^3 = 48 \Rightarrow P(A) = \frac{48}{256} = 0,1875$.

Bài 15. $|\Omega| = C_{52}^8$.

Giả sử trong 8 quân bài mà người đó được chia có 3 quân thuộc bộ *A*, 3 quân thuộc bộ *B* và 2 quân thuộc bộ *C*. Để được một kết quả thuận lợi ta thực hiện theo các bước sau:

+ Chọn bộ *C*. Có 13 cách.

+ Chọn hai bộ *A, B*. Có C_{12}^2 cách.

+ Với bộ *C* chọn 2 quân trong 4 quân. Có C_4^2 cách chọn.

+ Với bộ *B* và *C* chọn 3 quân trong 4 quân. Có C_4^3 cách chọn.

Vậy $|\Omega_A| = 13.C_{12}^2.C_4^2.C_4^3.C_4^3 = 82368 \Rightarrow P(A) = \dfrac{82368}{C_{52}^8} \approx 0,00011$.

Bài 16. $|\Omega| = 6! = 720$.

a) $|\Omega_A| = 3!.3! + 3!.3! = 72 \Rightarrow P(A) = \dfrac{72}{720} = 0,1$.

b) $|\Omega_B| = 4.3! = 24 \Rightarrow P(B) = \dfrac{24}{720} \approx 0,3333$.

Bài 17. $|\Omega| = 7! = 5040$; $|\Omega_A| = 2.6! = 1440 \Rightarrow P(A) = \dfrac{1440}{5040} \approx 0,2857$.

Bài 18. $|\Omega| = C_{10}^3 = 120$

$|\Omega_A| = C_6^2.C_4^1 + C_4^2.C_6^1 = 96 \Rightarrow P(A) = \dfrac{96}{120} = 0,8$.

Bài 19. $|\Omega| = C_{18}^5 = 8568$

$|\Omega_A| = C_8^3.C_{10}^2 = 2520 \Rightarrow P(A) = \dfrac{2520}{8568} \approx 0,2941$.

Bài 20. $|\Omega| = C_{30}^3$

a) $|\Omega_A| = C_8^3 \Rightarrow P(A) = \dfrac{C_8^3}{C_{30}^3} = \dfrac{2}{145} \approx 0,0138$.

b) $|\Omega_B| = C_{30}^3 - C_{22}^3 \Rightarrow P(B) = \dfrac{C_{30}^3 - C_{22}^3}{C_{30}^3} = \dfrac{18}{29} \approx 0,6207$.

c) $|\Omega_C| = C_{23}^3 \Rightarrow P(C) = \dfrac{C_{23}^3}{C_{30}^3} = \dfrac{250}{580} \approx 0,4362$.

Bài 21. $|\Omega| = C_7^3$

a) $|\Omega_A| = C_3^2.C_4^1 \Rightarrow P(A) = \dfrac{C_3^2.C_4^1}{C_7^3} = \dfrac{12}{35} \approx 0,3429$.

b) $|\Omega_B| = C_4^3 \Rightarrow P(B) = \dfrac{C_4^3}{C_7^3} = \dfrac{4}{35} \approx 0,1143$.

Bài 22. a) $|\Omega| = 6^3 = 216$

$\Omega_A = \{(6,6,6);(6,6,5);(6,6,4);(6,5,5);(6,5,4);\cdots;(4,5,6)\}$

$\Rightarrow |\Omega_A| = 1+3+3+3+3! = 16 \Rightarrow P(A) = \dfrac{16}{216} \approx 0,0741$.

b) $|\Omega| = 5! = 120$; $|\Omega_B| = 2 \Rightarrow P(B) = \dfrac{1}{60} \approx 0,0167$.

Bài 23. $|\Omega| = C_{10}^6$; $|\Omega_A| = C_8^6 + C_8^5.C_2^1 \Rightarrow P(A) = \dfrac{C_8^6 + C_8^5.C_2^1}{C_{10}^6} = \dfrac{2}{3} \approx 0,6667$.

Bài 24. a) Số cách chọn : $C_{12}^4 = 495$ cách.

b) Nếu gọi A: " 4 người được chọn có đúng 1 nữ"

Ta có : $|\Omega| = C_{12}^4 = 495$, $|\Omega_A| = C_3^1.C_9^3 = 252 \Rightarrow P(A) = \dfrac{252}{495} \approx 0,5091$.

c) Số cách chia thành 3 nhóm : $C_{12}^4.C_8^4.C_4^4 = 34650$

Số cách chia được mỗi nhóm có đúng 1 nữ : $C_3^1.C_9^3.C_2^1.C_6^3 = 10080$

Nên xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ là

$$P(B) = \frac{10080}{34650} = \frac{16}{55} \approx 0,2909.$$

Bài 25. $|\Omega| = C_{10}^4 = 210$.

a) $|\Omega_A| = C_6^4 + C_4^4 = 16 \Rightarrow P(A) = \dfrac{16}{210} = 0,0762$.

b) Nếu gọi *B*: "cả bốn quả được chọn đều xanh" thì $P(B) = \dfrac{C_4^4}{210} = \dfrac{1}{210}$

Suy ra, $\overline{B}$: " có ít nhất một quả được chọn màu trắng".

Do đó : $P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{1}{210} = 0,9952$.

Bài 26. Gọi A_i ,$(i = \overline{1,4})$ là biến cố :"đồng xu thứ *i* sấp" $\Rightarrow P(A_i) = \dfrac{1}{2}$.

a) Nếu *A* : "cả bốn đồng xu đều sấp" thì $A = A_1A_2A_3A_4$ mà A_i ,$(i = \overline{1,4})$ là các biến cố độc lập nên $P(A) = P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(A_4) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$.

b) Nếu *B* : "cả bốn đồng xu đều ngửa" thì $\overline{B}$: "Có ít nhất một đồng xu sấp"

mà $P(B) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}).P(\overline{A_4}) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$

$\Rightarrow P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{1}{16} = 0,9375$.

c) Nếu *C*: "Có đúng một đồng xu sấp" thì

$C = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4} \cup A_2\overline{A_1}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4} \cup A_3\overline{A_2}\,\overline{A_1}\,\overline{A_4} \cup A_4\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_1}$

$\Rightarrow P(C) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{4}$.

Bài 27. Gọi A_1 : "đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt ngửa" $\Rightarrow P(A_1) = \dfrac{1}{3}$

A_2 : "đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt sấp" $\Rightarrow P(A_2) = \dfrac{2}{3}$

B_1: "đồng xu thứ hai xuất hiện mặt ngửa" $\Rightarrow P(B_1)=\frac{3}{4}$

B_2: "đồng xu thứ hai xuất hiện mặt sấp" $\Rightarrow P(B_2)=\frac{1}{4}$

a) Nếu *A* là biến cố : "Khi gieo hai đồng xu một lần cả hai đồng xu đều ngửa" thì

$$A=A_1B_1 \Rightarrow P(A)=P(A_1).P(B_1)=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

b) Nếu *C* là biến cố : "Khi gieo hai đồng xu lần thứ nhất cả hai đồng xu đều sấp"
D là biến cố : "Khi gieo hai đồng xu lần thứ hai cả hai đồng xu đều sấp"

Tương tự trên ta có : $P(C)=P(D)=P(A_2).P(B_2)=\frac{2}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{6}.$

Nếu *B* là biến cố : "Khi gieo hai đồng xu hai lần , cả hai lần hai đồng xu đều sấp"

thì $B=CD \Rightarrow P(B)=P(C).P(D)=\frac{1}{6}.\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$

Bài 28. Gọi *A* là biến cố " con xúc xắc xuất hiện mặt 3 chấm" $\Rightarrow P(A)=\frac{1}{6}$

B là biến cố "đồng xu xuất hiện mặt sấp" $\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}$

C là biến cố "đồng xu xuất hiện mặt sấp và con xúc xắc xuất hiện mặt 3 chấm"

$$\Rightarrow C=AB \Rightarrow P(C)=P(A).P(B)=\frac{1}{6}.\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$$

Bài 29. Gọi *A* là biến cố "người thứ nhất bắn trúng mục tiêu" $\Rightarrow P(A)=0,8$.
B là biến cố "người thứ hai bắn trúng mục tiêu" $\Rightarrow P(B)=0,9$.

a) Nếu *C* : "chỉ có một người bắn trúng mục tiêu" thì $C=A\overline{B}\cup\overline{A}B$

$$P(C)=(0,8).(1-0,9)+(1-0,8).(0,9)=0,26.$$

b) Nếu *D* : "cả hai người bắn trượt"

$$\Rightarrow D=\overline{A}\,\overline{B} \Rightarrow P(D)=(1-0,8).(1-0,9)=0,02.$$

c) Nếu *E* : "Có ít nhất một người bắn trúng mục tiêu" thì $E=\overline{D}$

$$\Rightarrow P(E)=P(\overline{D})=1-0,02=0,98.$$

Bài 30. a) Người quay sẽ được phần thưởng khi ta có *A*: "trong hai lần quay ít nhất một lần chiếc kim dừng ở ô phần thưởng". Gọi *B* là biến cố : "cả hai lần quay người đó đều không quay trúng ô phần thưởng" $\Rightarrow P(B)=\frac{9}{10}.\frac{9}{10}=\frac{81}{100}.$

Vì $A=\overline{B} \Rightarrow P(A)=1-P(B)=1-\frac{81}{100}=\frac{19}{100}$

b) Để người quay được 60 điểm thì lần quay thứ nhất phải được 30 điểm, lần quay thứ hai phải được 30 điểm hoặc ô nhân đôi.

Gọi C_1 : "lần quay thứ nhất người quay được 30 điểm" $\Rightarrow P(C_1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

C_2 : "lần quay thứ hai người quay được 30 điểm" $\Rightarrow P(C_2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

C_3 : "lần quay thứ hai người quay trúng ô nhân đôi" $\Rightarrow P(C_3)=\frac{1}{10}.$

Gọi C : "sau 2 lần quay quay được 60 điểm"

$$\Rightarrow C=C_1C_2\cup C_1C_3 \Rightarrow P(C)=\frac{1}{5}.\frac{1}{5}+\frac{1}{5}.\frac{1}{10}=\frac{3}{50}.$$

Bài 31. Gọi A_i là biến cố "Bạn Anh trả lời đúng câu thứ *i* ", $i=1,2,3,....,50$.

Suy ra $P(A_i)=\frac{1}{4}$. Để được 5 điểm thì bạn Anh phải trả lời đúng 25 câu trong 50 câu hỏi , biến cố *B* đó là hợp của C_{50}^{25} biến cố , trong đó mỗi một biến cố trong hợp trên lại là giao của 25 biến cố A_i và 25 biến cố $\overline{A_i}$. Tức là:

$$P(B)=C_{50}^{25}\left(\frac{1}{4}\right)^{25}.\left(1-\frac{1}{4}\right)^{25}=C_{50}^{25}\frac{3^{25}}{4^{50}}\approx 0,00008.$$

Bài 32. Gọi A_i là biến cố "lần khoan thứ *i* trúng túi dầu" , $i=1,2,3,4,5$.

$$P(A_i)=0,2$$

a) Nếu *A* là biến cố : "Trúng một lần duy nhất trong 5 lần khoan" thì

$$C=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}\cup A_2\overline{A_1}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}\cup A_3\overline{A_2}\,\overline{A_1}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}$$
$$\cup A_4\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_1}\,\overline{A_5}\cup A_5\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}$$

$$\Rightarrow P(C)=5.(0,2).(1-0,2)^4=0,4096.$$

b) Gọi *B* là biến cố : "không trúng lần nào trong 5 lần khoan" thì
$B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5} \Rightarrow P(B)=(0,8)^5$, mà $\overline{B}$: "Ít nhất trúng một lần trong 5 lần khoan " $\Rightarrow P(\overline{B})=1-(0,8)^5\approx 0,6723.$

Bài 33. a) Máy bay được nếu có ít nhất 3 động cơ làm việc.

Gọi A_1 là biến cố: " cả 5 động cơ đều hỏng" $\Rightarrow P(A_1)=(0,3)^3.(0,2)^2$

A_2 là biến cố: "có 4 động cơ hỏng" $\Rightarrow A_2=B_1\cup B_2$

Trong đó B_1 là biến cố: "3 động cơ bên cánh trái và 1 động cơ bên cánh phải hỏng" $\Rightarrow P(B_1)=(0,3)^3C_2^1.(0,2).(0,8).$

B_2 là biến cố: "2 động cơ bên cánh trái và 2 động cơ bên cánh phải hỏng"

$$\Rightarrow P(B_2)=C_3^2(0,3)^2(0,2)^2.(0,7)$$

$$\Rightarrow P(A_2)=(0,3)^3C_2^1.(0,2).(0,8)+C_3^2(0,3)^2(0,2)^2.(0,7)$$

Do đó , xác suất của biến cố *A*: "máy bay rơi" là:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=0,01476$$

Vậy xác suất để máy bay bay được an toàn là: $1-P(A)=0,98524$.

b) Máy bay được nếu có ít nhất trên mỗi cánh có một động cơ làm việc.

Gọi C_1 là biến cố: "cánh phải có ít nhất một động cơ làm việc"

$\Rightarrow P(C_1)=1-(0,2)^2$.

C_2 là biến cố: "cánh trái có ít nhất một động cơ làm việc" $\Rightarrow P(C_2)=1-(0,3)^3$

Nếu C là biến cố: "máy bay bay được" thì $C=C_1C_2$.

$$\Rightarrow P(C)=P(C_1).P(C_2)=0,93408.$$

Bài 34. Xét biến cố *B:* "bốn người có ngày sinh đôi một khác nhau"

Ta có: $|\Omega|=365^4, |\Omega_B|=365.364.363.362 \Rightarrow P(B)=\dfrac{365.364.363.362}{365^4}\approx 0,9836$.

Do đó biến cố $\overline{B}$: "bốn người có ít nhất 2 người có sinh nhật trùng nhau" có xác suất là : $P(\overline{B})=1-0,9836\approx 0,0164$.

Bài 35. a) Anh ta sẽ trở lại điểm xuất phát khi và chỉ khi trong 8 bước anh ta có 4 bước tiến và 4 bước lùi, ta thấy có C_8^4 trường hợp như thế. Xác suất trong mỗi trường hợp đều là $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4.\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$. Do đó xác suất cần tìm: $P=C_8^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{35}{128}$.

b) Anh ta cách điểm xuất phát hơn 4 mét (có thể cả về hai phía) khi số bước tiến của anh ta là 8 hoặc 7 hoặc 1 hoặc 0. Vậy xác suất cần tìm sẽ là:

$$P=C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8+C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1+C_8^0\left(\frac{1}{2}\right)^8+C_8^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{9}{128}.$$

Bài 36. Gọi A là biến cố "học sinh đó mua sách A" $\Rightarrow P(A)=0,5$

B là biến cố "học sinh đó mua sách B" $\Rightarrow P(B)=0,7$

C là biến cố "học sinh đó mua sách C" $\Rightarrow P(C)=0,6$

$P(AB)=0,3$; $P(BC)=0,4$; $P(AC)=0,2$; $P(ABC)=0,1$

a) Nếu M là biến cố: "em đó mua sách A hoặc B" thì $M=A\cup B$

$$\Rightarrow P(M)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,5+0,7-0,3=0,9.$$

b) Nếu N là biến cố: "em đó mua ít nhất một trong ba tên sách" thì

$$N=A\cup B\cup C$$

$$\Rightarrow P(M)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

$$=0,5+0,7+0,6-0,3-0,4-0,2+0,1=1.$$

c) Nếu H là biến cố: "em đó mua đúng hai trong ba tên sách nói trên" thì

$$H=AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC \Rightarrow P(H)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$$

Vì $AB=AB\overline{C}\cup ABC\Rightarrow P(AB)=P(AB\overline{C})+P(ABC)$

$$\Rightarrow P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=0,3-0,1=0,2$$

Tương tự: $P(A\overline{B}C)=P(AC)-P(ABC)=0,2-0,1=0,1$

$$P(\overline{A}BC)=P(BC)-P(ABC)=0,4-0,1=0,3$$

Vậy $P(H)=0,2+0,1+0,3=0,6$.

Bài 37. Gọi biến cố A : "Có ít nhất một đồng xu sấp"

$\Rightarrow \overline{A}$: " Ba đồng xu đều ngửa"

Ta có: $|\Omega|=2^3=8$, $|\Omega_{\overline{A}}|=1 \Rightarrow P(\overline{A})=\dfrac{1}{8}\Rightarrow P(A)=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$

Bài 38. Gọi A_1 : " Lần sinh thứ nhất người đó sinh con gái" $P(A_1)=0,486$

A_2 : " Lần sinh thứ hai người đó sinh con gái" $P(A_2)=0,486$

Nếu gọi A : "lần sinh thứ hai người đó đạt được mong muốn" thì

$$A=\overline{A_1}A_2 \Rightarrow P(A)=P(\overline{A_1}).P(A_2)=(1-0,486).0,486\approx 0,2498.$$

Bài 39. Gọi A_1 : " Máy bay 1 ném đúng mục tiêu" $P(A_1)=0,7$

A_2 : "Máy bay 2 ném đúng mục tiêu" $P(A_2)=0,8$

Nếu gọi A : " Mục tiêu bị trúng bom thì : $A=A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2\cup A_1\overline{A_2}$

$$\Rightarrow P(A)=P(A_1).P(A_2)+P(\overline{A_1}).P(A_2)+P(\overline{A_2}).P(A_1)$$

$$=0,7.0,8+0,3.0,8+0,2.0,7=0,94$$

Vậy mục tiêu bị trúng bom có xác suất là 94%.

Bài 40. Rõ ràng X là biến nhẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị trong tập :

$$\{3;4;5;6;7\}$$

Để lập được bảng phân bố xác suất của X, ta cần tính : $P(X=3);P(X=4);P(X=5);P(X=6);P(X=7)$.

Ta có : $|\Omega|=C_4^2=6$.

+ Khi $X=3$, tức là hai thẻ được chọn có tổng hai số ghi trên thẻ là 3

$\Rightarrow \Omega_A=\{(1,2)\}\Rightarrow|\Omega_A|=1$. Vậy $P(X=3)=\dfrac{1}{6}$.

+ Khi $X=4$, tức là hai thẻ được chọn có tổng hai số ghi trên thẻ là 4

$\Rightarrow \Omega_B=\{(1,3)\}\Rightarrow|\Omega_B|=1$. Vậy $P(X=4)=\dfrac{1}{6}$.

+ Khi $X=5$, tức là hai thẻ được chọn có tổng hai số ghi trên thẻ là 5

$\Rightarrow \Omega_C=\{(1,4);(2;3)\}\Rightarrow|\Omega_C|=2$. Vậy $P(X=5)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

+ Khi $X=6$, tức là hai thẻ được chọn có tổng hai số ghi trên thẻ là 6

$\Rightarrow \Omega_D=\{(2,4)\}\Rightarrow|\Omega_D|=1$. Vậy $P(X=6)=\dfrac{1}{6}$.

+ Khi $X=7$, tức là hai thẻ được chọn có tổng hai số ghi trên thẻ là 7

$\Rightarrow \Omega_E=\{(3,4)\}\Rightarrow|\Omega_E|=1$. Vậy $P(X=7)=\dfrac{1}{6}$.

Vậy ta có bảng phân bố xác suất của X như sau:

X	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Chương 3:
DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN
§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC – DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương pháp chứng minh quy nạp

1.1. ***Khái niệm :*** Để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n, ta thực hiện như sau:

- ***Bước 1:*** Kiểm tra mệnh đề đúng với $n=1$.
- ***Bước 2:*** Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương $n=k$ tuỳ ý $(k\ge 1)$, chứng minh rằng mệnh đề đúng với $n=k+1$.

1.2. ***Chú ý:*** Nếu phải chứng minh mệnh đề $A(n)$ là đúng với với mọi số nguyên dương $n\ge p$ thì:

- Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n=p$
- Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương bất kì $n=k$, $(k\ge p)$ và phải chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$.

2. Dãy số

2.1. ***Định nghĩa :*** Dãy số là hàm số với đối số là số tự nhiên

$$u:\ \mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$$
$$n\mapsto u(n)$$

2.2. Dãy số tăng, dãy số giảm

- (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

  $\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1,\ \left(u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

- (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1}<u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

  $\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n<0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1,\ \left(u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

2.3. **Dãy số bị chặn**

- (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M\in\mathbb{R}:\ u_n\le M,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{R}:\ u_n>m,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m,\ M\in\mathbb{R}:\ m\le u_n\le M,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

1. Chứng minh các mệnh đề bằng quy nạp

Phương pháp : Ta thực hiện đúng theo 2 bước :

- ***Bước 1:*** (bước cơ sở) Chứng minh đẳng thức đúng khi $n=1$ (hoặc $n=p$).
- ***Bước 2:*** (bước quy nạp) Giả sử đẳng thức đúng khi $n=k$ với $k\ge 1$ (hay $k\ge p$), ta phải chứng minh đẳng thức đó cũng đúng khi $n=k+1$.

1.1. Các ví dụ minh họa :

Ví dụ 1. Chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$:

a) $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (1);

b) $1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (2).

Lời giải

a) Khi $n=1\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 1=\dfrac{1(1+1)}{2}\Leftrightarrow 1=1$ (đúng).

Giả sử (1) đúng khi $n=k$, $(k\ge 1)$, tức là ta có :

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Ta phải chứng minh (1) cũng đúng khi $n=k+1$, tức là ta phải chứng minh đẳng thức sau : $1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ (**)

(**) có vế trái :

$$1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\quad;\ (\text{do }(*))$$
$$=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\ =\text{ vế phải}$$

Tức (**) đúng. Do đó (1) đúng $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Khi $n=1\Rightarrow(2)\Leftrightarrow 1^2=\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}\Leftrightarrow 1=1$ (đúng).

Giả sử (2) đúng khi $n=k$, $(k\ge 1)$, tức là ta có :

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\qquad(*)$$

Ta phải chứng minh (2) cũng đúng khi $n=k+1$, tức là ta phải chứng minh đẳng thức sau :

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\qquad(**)$$

(**) có vế trái :

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\quad;\ (\text{do }(*))$$
$$=\frac{(k+1)}{6}\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]=\frac{(k+1)}{6}\left(2k^2+7k+6\right)$$
$$=\frac{(k+1)}{6}\cdot 2\cdot(k+2)\cdot\left(k+\frac{3}{2}\right)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\ =\text{ vế phải}$$

Tức (**) đúng. Do đó (2) đúng $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2. Chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $1.2 + 2.3 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (1);

b) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ (2).

Lời giải

a) Khi $n = 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 1 \cdot 2 = \dfrac{1(1+1)(1+2)}{3} \Leftrightarrow 2 = 2$ (đúng).

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $(k \geq 1)$, tức là ta có:

$$1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Ta phải chứng minh (1) cũng đúng khi $n = k+1$, tức là ta phải chứng minh đẳng thức sau:

$$1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \quad (**)$$

(**) có vế trái:

$$1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{3}(k+3) \ = \text{vế phải}$$

Tức (**) đúng. Do đó (1) đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Khi $n = 1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{1+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ (đúng).

Giả sử (2) đúng khi $n = k$, $(k \geq 1)$, tức là ta có:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Ta phải chứng minh (2) cũng đúng khi $n = k+1$, tức là ta phải chứng minh đẳng thức sau: $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{k(k+1)} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k+1}{k+2}$ (**)

(**) có vế trái:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = \text{vế phải}$$

Tức (**) đúng. Do đó (2) đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 3. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $2^{n-3} > 3n - 1$, $\forall n \geq 8$ (1);

b) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (2).

Lời giải

a) Khi $n = 8 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2^5 > 3.8 - 1 \Leftrightarrow 32 > 23$ (đúng).

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $(k \geq 8)$, tức là ta có: $2^{k-3} > 3k - 1$

Ta phải chứng minh (1) cũng đúng khi $n = k+1$, tức là ta phải chứng minh bất đẳng thức sau: $2^{k-2} > 3k + 2$ (**)

(**) có vế trái: $2^{k-2} = 2.2^{k-3} > 2(3k-1) = (3k+2) + (3k-4) > 3k + 2$

(do $3k - 4 > 0$, $\forall k \geq 8$).

Tức (**) đúng. Do đó (1) đúng $\forall n \geq 8$, $(n \in \mathbb{N})$.

b) Khi $n = 1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow 1 < 2\sqrt{1} \Leftrightarrow 1 < 2$ (đúng).

Giả sử (2) đúng khi $n = k$, $(k \geq 1)$, tức là ta có: $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$

Ta phải chứng minh (1) cũng đúng khi $n = k+1$, tức là ta phải chứng minh bất đẳng thức sau: $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$ (**)

(**) có vế trái:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{(k+k+1)+1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2(k+1)}{\sqrt{k+1}} = 2\sqrt{k+1}$$

(do theo bất đẳng thức Cauchy: $2\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1} \leq k + k + 1$).

Tức (**) đúng. Do đó (2) đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 4. Chứng minh các mệnh đề sau:

a) $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (1);

b) $v_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (2).

Lời giải

a) Khi $n = 1 \Rightarrow u_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9 \vdots 3 \Rightarrow (1)$ (đúng).

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $(k \geq 1)$, tức là ta có: $u_k = k^3 + 3k^2 + 5k \vdots 3$

Ta phải chứng minh (1) cũng đúng khi $n = k+1$, tức là ta phải chứng minh:

$$u_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) \vdots 3 \quad (**)$$

Ta có: $u_{k+1} = (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3k^2 + 9k + 9 = u_k + 3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3$

(do $u_k \vdots 3$, $3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3$).

Tức (**) đúng. Do đó (1) đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Khi $n = 1 \Rightarrow v_1 = 3^3 + 2^3 = 35 \vdots 7 \Rightarrow (2)$ (đúng).

Giả sử (2) đúng khi $n = k$, $(k \geq 1)$, tức là ta có: $v_k = 3^{2k+1} + 2^{k+2} \vdots 7$

Ta phải chứng minh (2) cũng đúng khi $n = k+1$, tức là ta phải chứng minh:

$v_{k+1} = 3^{2k+3} + 2^{k+3} \vdots 7 \quad (**)$

Ta có : $v_{k+1} = 3^{2k+3} + 2^{k+3} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2}$

$= 9\left(3^{2k+1} + 2^{k+2}\right) - 7 \cdot 2^{k+2} = 9v_k - 7 \cdot 2^{k+2} \vdots 7$

(do $v_k \vdots 7$; $7 \cdot 2^{k+2} \vdots 7$).

Tức (**) đúng. Do đó (2) đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Tìm các số hạng của dãy số và tìm số hạng tổng quát của dãy số khi cho bằng hệ thức truy hồi.

2.1. *Phương pháp:*

- Dựa theo cách cho của dãy số để tìm ra các số hạng cần tìm, nếu dãy số cho dưới dạng tổng quát thì muốn tìm số hạng thứ k ta chỉ việc thay $n = k$ vào công thức tổng quát. Nếu dãy số cho dưới dạng truy hồi thì ta phải tính các số hạng truy hồi dần lên đến số hạng cần tìm.
- Để tìm số hạng tổng quát của một dãy số khi nó được cho dưới dạng truy hồi ta có rất nhiều cách nhưng thông thường ta nên viết một số số hạng đầu, rồi dự đoán công thức và chứng minh lại bằng quy nạp.

2.2. *Các ví dụ minh họa:*

Ví dụ 1. Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) biết :

a) $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$; b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 15,\ u_2 = 9 \\ u_{n+2} = u_n - u_{n+1} \end{cases}$

Lời giải

a) $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \Rightarrow u_1 = 0,\ u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ u_3 = \dfrac{2}{\sqrt{10}},\ u_4 = \dfrac{3}{\sqrt{17}},\ u_5 = \dfrac{4}{\sqrt{26}}$.

b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 15,\ u_2 = 9 \\ u_{n+2} = u_n - u_{n+1} \end{cases} \Rightarrow u_3 = -6,\ u_4 = 15,\ u_5 = -21$.

Ví dụ 2. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết :

a) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$; b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có : $u_1 = 1 = 2^2 - 3$

$u_2 = 5 = 2^3 - 3$

$u_3 = 13 = 2^4 - 3$

$u_4 = 29 = 2^5 - 3$

……………………

Dự đoán : $u_n = 2^{n+1} - 3$ (*), ta chứng minh lại bằng quy nạp :

+ Khi $n = 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow u_1 = 2^2 - 3 = 1$, vậy (*) đúng.

+ Giả sử (*) đúng khi $n = k$, $(k \geq 1)$, tức là $u_k = 2^{k+1} - 3$

Theo công thức dãy số đã cho, ta có :

$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2\left(2^{k+1} - 3\right) + 3 = 2^{k+2} - 3$, tức (*) đúng khi $n = k+1$

Vậy, số hạng tổng quát của dãy số trên là : $u_n = 2^{n+1} - 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$

Ta có : $u_1 = 3 = \sqrt{3^2+0}$

$u_2 = \sqrt{10} = \sqrt{3^2+1}$

$u_3 = \sqrt{11} = \sqrt{3^2+2}$

$u_4 = \sqrt{12} = \sqrt{3^2+3}$

……………………

Dự đoán: $u_n = \sqrt{3^2+n-1}$ (*), ta chứng minh lại bằng quy nạp :

+ Khi $n = 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow u_1 = \sqrt{3^2+0} = 3$, vậy (*) đúng.

+ Giả sử (*) đúng khi $n = k$, $(k \geq 1)$, tức là $u_k = \sqrt{3^2+k-1}$

Theo công thức dãy số đã cho, ta có:

$u_{k+1} = \sqrt{1+u_k^2} = \sqrt{1+\left(3^2+k-1\right)} = \sqrt{3^2+k}$, tức (*) đúng khi $n = k+1$

Vậy, số hạng tổng quát của dãy số trên là : $u_n = \sqrt{3^2+n-1} = \sqrt{n+8}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

> ***Chú ý:*** Ta có thể sử dụng các mệnh đề sau để dự đoán số hạng tổng quát của các dãy số đơn giản thường gặp :

- Nếu $(u_n): \begin{cases} u_1 = m \\ u_n = a.u_{n-1} + b,\ \forall n \geq 2 \end{cases}$, $(a, b \neq 0)$ thì :

$$u_n = \left[\begin{array}{ll} m + (n-1)b & \text{khi } a = 1 \\ m.a^{n-1} + \dfrac{b\left(a^{n-1}-1\right)}{a-1} & \text{khi } a \neq 1 \end{array}\right.$$

- Nếu $(u_n): \begin{cases} u_1 = m,\ u_2 = n \\ u_n = a.u_{n-1} + bu_{n-2} \end{cases}$, $\left(a^2 + 4b \geq 0\right)$, khi đó gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình : $x^2 - ax - b = 0$:
  - ○ Khi $x_1 \neq x_2$ thì $u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$ trong đó α, β là nghiệm của hệ : $\begin{cases} \alpha + \beta = m \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = n \end{cases}$
  - ○ Khi $x_1 = x_2 = c$ thì $u_n = (\alpha n + \beta)c^{n-1}$ trong đó α, β là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \alpha = cm \\ \alpha + \beta = n \end{cases}$

3. Xét tính tăng, giảm và tính bị chặn của dãy số

3.1. *Phương pháp:*

- Dựa theo định nghĩa:
  - (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

    $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1\ ,\ \left(u_n > 0\ ,\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$
  - (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

    $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1\ ,\ \left(u_n > 0\ ,\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$
  - (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m,\ M \in \mathbb{R}: m \le u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3.2. *Các ví dụ minh họa:*

Ví dụ 1. Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n) biết :

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{3n-2}$; b) $u_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n}}$; c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2}$.

Lời giải

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{3n-2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{7/3}{3n-2} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{7/3}{3(n+1)-2}$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{7/3}{3(n+1)-2} - \frac{7/3}{3n-2} = \frac{-7}{(3n-2)\left[3(n+1)-2\right]} < 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy dãy số đã cho giảm.

b) $u_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1}$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$$

$$= \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{n(n+1)}} + 1\right) < 0\ ,\forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy dãy số đã cho giảm.

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+3} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+3} - \dfrac{(-1)^n}{n+2}$.

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+5}{(n+3)(n+2)} = \begin{cases} \dfrac{2n+5}{(n+3)(n+2)} > 0 & \text{khi } n = 2k+1 \\ -\dfrac{2n+5}{(n+3)(n+2)} < 0 & \text{khi } n = 2k \end{cases}$$

Vậy dãy số đã cho không tăng, cũng không giảm (không đơn điệu).

Ví dụ 2. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) biết :

a) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$; b) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$; c) $u_n = (-1)^n \cos\dfrac{\pi}{2n}$.

Lời giải

a) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1} = 1 + \dfrac{n-1}{n^2+n+1}$; Vì $0 \le \dfrac{n-1}{n^2+n+1} < 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 1 \le u_n < 2\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số đã cho bị chặn.

b) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1} \Rightarrow 0 < u_n < \dfrac{1}{2}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số đã cho bị chặn.

c) $u_n = (-1)^n \cos\dfrac{\pi}{2n} \Rightarrow |u_n| = \left|\cos\dfrac{\pi}{2n}\right| \le 1 \Rightarrow -1 \le u_n \le 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số đã cho bị chặn.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1.4 + 2.7 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

b) $1 + 3 + 6 + 10 + \cdots\cdots + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots\cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

d) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots\cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$;

e) $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dfrac{1}{3.4.5} + \cdots + \dfrac{1}{n.(n+1).(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

f) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$;

g) $\sin x + \sin 2x + \cdots\cdots + \sin nx = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}.\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$;

h) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{2}}}}}_{(n\ \text{dấu căn})} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

Bài 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $2^{n+2} > 2n+5\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$; b) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < 2 - \dfrac{1}{n}\ ,\ \forall n \ge 2$;

c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

d) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$, $\forall n\geq 2$;

e) $3^{n-1}>n(n+2)$, $\forall n\geq 4$.

f) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Bài 3. Chứng minh các mệnh đề sau đúng $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

a) n^3+2n chia hết cho 3 ; b) $7.2^{2n-2}+3^{2n-1}$ chia hết cho 5 ;

c) n^3+11n chia hết cho 6 ; d) 13^n-1 chia hết cho 6 ;

e) $11^{n+1}+12^{2n-1}$ chia hết cho 133 ; f) $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ chia hết cho 19.

Bài 4. a) Cho số thực $a>-1$. Chứng minh rằng : $(1+a)^n\geq 1+na$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) Chứng minh rằng nếu $a>0$, $b>0$, $n\in\mathbb{N}^*$ thì ta có : $\frac{a^n+b^n}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$

c) Cho n số thực $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\in(0;1)$. Chứng minh rằng :

$$(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot\cdots\cdot(1-x_n)>1-x_1-x_2-\cdots-x_n,\ \forall n\geq 2.$$

Bài 5. (*) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết :

a) $(u_n):\begin{cases}u_1=-1\\ u_{n+1}=2u_n+1\end{cases}$; b) $(u_n):\begin{cases}u_1=\frac{5}{4}\\ u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2}\end{cases}$;

c) $(u_n):\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+5\end{cases}$; d) $(u_n):\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}\end{cases}$;

e) $u_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{(n\ \text{dấu căn})}$; f) $(u_n):\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=5u_n\end{cases}$;

g) $(u_n):\begin{cases}u_1=-1,\ u_2=3\\ u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_{n-2}\end{cases}$; h) $(u_n):\begin{cases}u_1=0,\ u_2=3\\ u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_{n-2}\end{cases}$.

Bài 6. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n) biết :

a) $u_n=\frac{n^2+n+1}{n^2+1}$; b) $u_n=\frac{4^n-1}{4^n+5}$;

c) $u_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$; d) $u_n=\frac{\sqrt{n+11}}{n}$;

e) $(u_n):\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\frac{2u_n}{u_n+3}\end{cases}$; f) $(u_n):\begin{cases}u_1=\sqrt{6}\\ u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\end{cases}$.

Bài 7. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) biết :

a) $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$; b) $u_n=n^2+4$;

c) $u_n=\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}$; d) $u_n=\frac{3n^2+2n+1}{n^2+2}$.

Bài 8. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) biết :

a) $u_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

b) $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Bài 9. (*) Xét tính tăng, giảm và bị chặn của các dãy số sau :

a) $(u_n):\begin{cases}u_1=\sqrt{2}\\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\end{cases}$; b) $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$.

Bài 10. Cho dãy số : $(u_n):\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\frac{2}{u_n^2+1}\end{cases}$. Chứng minh (u_n) là dãy số không đổi (dãy số có tất cả các số hạng đều bằng nhau).

Bài 11. (*) Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\frac{b\cdot 2n^2+1}{n^2+3}$ và $b\in\mathbb{R}$. Hãy xác định b để

a) (u_n) là dãy số giảm ; b) (u_n) là dãy số tăng.

Bài 12. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\sin(4n-1)\frac{\pi}{6}$. Tính tổng 15 số hạng đầu tiên của dãy số trên : $S_{15}=u_1+u_2+\cdots+u_{15}$.

§2. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cấp số cộng

1.1. ***Định nghĩa :*** Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n+d$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

d là số không đổi, gọi là công sai của cấp số cộng.

1.2. ***Số hạng tổng quát :*** $u_n=u_1+(n-1)d$, $(n\in\mathbb{N}^*)$.

1.3. ***Tính chất :*** $u_k=\frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$, $(\forall k\geq 2,\ k\in\mathbb{N}^*)$.

1.4. ***Tổng n số hạng đầu tiên:***

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{n(u_1+u_n)}{2}=\frac{n[2u_1+(n-1)d]}{2}$$

2. Cấp số nhân

2.1. ***Định nghĩa :*** Dãy số (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n\cdot q$, $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

q là số không đổi, gọi là công bội của cấp số nhân.

2.2. ***Số hạng tổng quát :*** $u_n=u_1.q^{n-1}$, $\left(\forall n\ge 2\,,n\in\mathbb{N}^*\right)$.

2.3. ***Tính chất :*** $u_k^2=u_{k-1}.u_{k+1}$, $\left(\forall k\ge 2\,,k\in\mathbb{N}^*\right)$.

2.4. ***Tổng n số hạng đầu tiên :***

$$\left[\begin{array}{ll} S_n=u_1+u_2+...+u_n=nu_1 & \text{khi } q=1\\ S_n=u_1+u_2+...+u_n=\dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{khi } q\ne 1\end{array}\right.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

1. Chứng minh các dãy số là cấp số

1.1. ***Phương pháp:*** Dựa theo định nghĩa của cấp số cộng và cấp số nhân để chứng minh

$\div(u_n)\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n+d\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=d,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, (d : không đổi).

$\div\!\div\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n\cdot q\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, (q : không đổi).

1.2. ***Các ví dụ minh họa:***

Ví dụ 1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng, nếu phải hãy tìm công sai của cấp số cộng đó :

a) $u_n=\dfrac{n}{2}-1$; b) $u_n=\dfrac{7-3n}{2}$;

c) $u_n=(-1)^n+2n$; d) $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=1-u_n\ ,(n\ge 1)\end{cases}$

Lời giải

a) Vì $u_n=\dfrac{n}{2}-1\Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{n+1}{2}-1=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{2}$, do đó :

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\ \text{(là hằng số không đổi)}$$

Vậy $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=\dfrac{1}{2}$.

b) Vì $u_n=\dfrac{7-3n}{2}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{3n}{2}\Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{7-3(n+1)}{2}=2-\dfrac{3n}{2}$,

do đó : $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{3}{2}$ (là hằng số không đổi)

Vậy $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{3}{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=-\dfrac{3}{2}$.

c) Vì $u_n=(-1)^n+2n\Rightarrow u_{n+1}=(-1)^{n+1}+2(n+1)=(-1)^{n+1}+2n+2$, do đó:

$$u_{n+1}-u_n=2+(-1)^{n+1}-(-1)^n=2+2(-1)^{n+1}=\left[\begin{array}{l}4\ \text{ khi } n=2k+1\\ 0\ \text{ khi } n=2k\end{array}\right.$$

Vậy (u_n) không phải là cấp số cộng.

d) Vì $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=1-u_n\ ,(n\ge 1)\end{cases}\Rightarrow u_{n+1}=1-u_n$,

do đó : $u_{n+1}-u_n=1-u_n=1-2u_n$ (hiệu này thay đổi theo n)

Nên (u_n) không phải là cấp số cộng.

Ví dụ 2. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân, nếu phải hãy tìm công bội của cấp số nhân đó :

a) $u_n=\dfrac{5}{2^n}$; b) $u_n=(-1)^n.3^{3n+1}$;

c) $u_n=n+3$; d) $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{2}{5}u_n\ ,(n\ge 1)\end{cases}$

Lời giải

a) Vì $u_n=\dfrac{5}{2^n}\Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{5}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{2^n}$, do đó : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{2}$ (là hằng số không đổi)

Vậy $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=\dfrac{1}{2}$.

b) Vì $u_n=(-1)^n.3^{3n+1}\Rightarrow u_{n+1}=(-1)^{n+1}.3^{3n+4}=-27.(-1)^n.3^{3n+1}$,

do đó : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=-27$ (là hằng số không đổi)

Vậy (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=-27$.

c) Vì $u_n=n+3\Rightarrow u_{n+1}=n+4$, do đó : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+4}{n+3}$ (thương này thay đổi theo n). Nên (u_n) không phải là cấp số nhân.

d) Vì $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{2}{5}u_n\ ,(n\ge 1)\end{cases}\Rightarrow u_{n+1}=\left(1+\dfrac{2}{5}\right)u_n=\dfrac{7}{5}u_n$.

Vậy $u_{n+1}=\dfrac{7}{5}u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=\dfrac{7}{5}$.

2. Tìm u_1 ; d ; q ; S_n của cấp số

Phương pháp: Dựa vào các công thức về số hạng tổng quát, tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng hoặc cấp số nhân để suy ra kết quả.

2.1.1. Nếu (u_n) là cấp số cộng thì:

- $u_n = u_1 + (n-1)d$, $(n \in \mathbb{N}^*)$
- $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2} = \dfrac{n[2u_1+(n-1)d]}{2}$.

2.1.2. Nếu (u_n) là cấp số nhân thì :

- $u_n = u_1.q^{n-1}$, $(\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$.
- $\left[\begin{array}{ll} S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = nu_1 & \text{khi } q = 1 \\ S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{khi } q \neq 1 \end{array}\right.$

2.2. *Các ví dụ minh họa :*

Ví dụ 1. Tìm u_1, d, u_{15}, S_{20} của các cấp số cộng sau :

a) $(u_n): 2,5,8,11,\cdots\cdots$; b) (u_n) biết $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$.

Lời giải

a) $(u_n): 2,5,8,11,\cdots\cdots$

$\Rightarrow u_1 = 2$, $d = 3$, $u_{15} = 2 + 14.3 = 44$; $S_{20} = \dfrac{20(2.2+19.3)}{2} = 610$.

b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ u_1 - 2d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow u_{15} = 3 + 14.4 = 59$, $S_{20} = \dfrac{20(2.3+19.4)}{2} = 820$.

Ví dụ 2. Tìm u_1, d của các cấp số cộng biết :

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases}$; d) $\begin{cases} S_{16} = \dfrac{152\sqrt{2}}{3} \\ S_{21} = 3S_{10} \end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -13 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4d = 8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \\ 6(2u_1 + 11d) = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{2} \\ d = \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

d) $\begin{cases} S_{16} = \dfrac{152\sqrt{2}}{3} \\ S_{21} = 3S_{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(2u_1 + 15d) = \dfrac{152\sqrt{2}}{3} \\ 21(u_1 + 10d) = 15(2u_1 + 9d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{3} \\ d = \dfrac{\sqrt{2}}{5} \end{cases}$.

Ví dụ 3. Cho một cấp số cộng có $u_5 + u_{31} = 24$. Tính tổng 35 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Lời giải

Ta có : $S_{35} = \dfrac{35(u_1 + u_{35})}{2} = \dfrac{35(u_1 + u_1 + 34d)}{2}$

$= \dfrac{35(u_1 + 4d + u_1 + 30d)}{2} = \dfrac{35(u_5 + u_{31})}{2} = \dfrac{35.24}{2} = 420$.

Ví dụ 4. a) Tìm 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng là 25 và tổng các bình phương của chúng là 165 ;

b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng là -10 và tổng các bình phương của chúng là 70.

Lời giải

a) Gọi 5 số hạng cần tìm là : $a-2x$, $a-x$, a, $a+x$, $a+2x$, theo giả thiết, ta có :

$\begin{cases} 5a = 25 \\ 5a^2 + 10x^2 = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Vậy 5 số cần tìm là : $1, 3, 5, 7, 9$ hoặc $9, 7, 5, 3, 1$.

b) Gọi 4 số hạng cần tìm là : $a-3x$, $a-x$, $a+x$, $a+3x$, theo giả thiết, ta có :

$\begin{cases} 4a = -10 \\ 4a^2 + 20x^2 = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{2} \\ x = \pm\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy 4 số cần tìm là : $-7, -4, -1, 2$ hoặc $2, -1, -4, -7$.

Ví dụ 5. Tìm u_1, q, u_{15}, S_{20} của các cấp số nhân sau :

a) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases} u_3+u_5=90 \\ u_2-u_6=240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2+u_1q^4=90 \\ u_1q-u_1q^5=240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2\left(1+q^2\right)=90 & (1) \\ u_1q\left(1-q^4\right)=240 & (2) \end{cases}$

Dễ thấy $u_1=0$, $q=0$, $q=\pm 1$ không thể là nghiệm của hệ, lấy (2) chia (1), ta được : $\dfrac{1-q^2}{q}=\dfrac{8}{3} \Leftrightarrow 3q^2+8q-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=-3 \\ q=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

$+\ q=\dfrac{1}{3} \Rightarrow u_1=729$, $u_{15}=729.\dfrac{1}{3^{14}}=\dfrac{1}{3^8}$, $S_{20}=\dfrac{729\left(1-\dfrac{1}{3^{20}}\right)}{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{3^{20}-1}{2.3^{13}}$.

$+$ Khi $q=-3 \Rightarrow u_1=1$, $u_{15}=3^{14}$, $S_{20}=\dfrac{1\left[1-(-3)^{20}\right]}{1-(-3)}=\dfrac{1-3^{20}}{4}$.

b) $\begin{cases} u_1-u_3+u_5=65 \\ u_1+u_7=325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1-q^2+q^4\right)=65 & (1) \\ u_1\left(1+q^6\right)=325 & (2) \end{cases}$

Dễ thấy $u_1=0$ không thể là nghiệm của hệ, lấy (2) chia (1), ta được :

$$\frac{1+q^6}{1-q^2+q^4}=5 \Leftrightarrow \frac{\left(1+q^2\right)\left(1-q^2+q^4\right)}{1-q^2+q^4}=5$$

$$\Leftrightarrow 1+q^2=5 \Leftrightarrow q=\pm 2 .$$

$+$ Khi $q=-2 \Rightarrow u_1=5$, $u_{15}=5.2^{14}$, $S_{20}=\dfrac{5\left[1-(-2)^{20}\right]}{1-(-2)}=\dfrac{5\left(1-2^{20}\right)}{3}$.

$+\ q=2 \Rightarrow u_1=5$, $u_{15}=5.2^{14}$, $S_{20}=\dfrac{5\left(1-2^{20}\right)}{1-2}=5\left(2^{20}-1\right)$.

Ví dụ 6. Tìm u_1 , q biết $\left(u_1>0\right)$ của các cấp số nhân biết :

a) $\begin{cases} u_1.u_5=25 \\ u_2+u_3+u_4=31 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=14 \\ u_1.u_2.u_3=64 \end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases} u_1.u_5=25 \\ u_2+u_3+u_4=31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2q^4=25 \\ u_1q\left(1+q+q^2\right)=31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2=5 \quad (\text{do } u_1>0) \\ u_1q\left(1+q+q^2\right)=31 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u_1q^2=5 \\ \dfrac{1+q+q^2}{q}=\dfrac{31}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2=5 \\ 5q^2-26q+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=5 \\ u_1=\dfrac{1}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} q=\dfrac{1}{5} \\ u_1=125 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=14 \\ u_1.u_2.u_3=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=14 \\ u_1^3q^3=64 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=14 \\ u_1q=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+q+q^2}{q}=\dfrac{7}{2} \\ u_1q=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2q^2-5q+2=0 \\ u_1q=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ u_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} q=\dfrac{1}{2} \\ u_1=8 \end{cases}$.

Ví dụ 7. a) Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 14 và tổng các bình phương của chúng là 84 .

b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 15 và tổng các bình phương của chúng là 85 .

Lời giải

a) *Cách 1 :* Gọi 3 số cần tìm là: $\dfrac{a}{x}$, a, ax , $(a\neq 0$, $x\neq 0)$ dễ thấy chúng là các số hạng liên tiếp của cấp số nhân có công bội $q=x$. Theo giả thiết, ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x}+a+ax=14 \\ \dfrac{a^2}{x^2}+a^2+a^2x^2=84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right)=14 \\ a^2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}+1\right)=84 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, $\left(|t|\geq 2\right) \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$, lúc đó (*) trở thành :

$$\begin{cases} a(t+1)=14 \\ a^2\left(t^2-1\right)=84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(t+1)^2=196 \\ a^2(t-1)(t+1)=84 \end{cases} \Rightarrow \frac{t+1}{t-1}=\frac{7}{3} \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow a=4 \\ x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow a=4 \end{array}\right.$$

Vậy các số cần tìm là: 2 , 4 , 8 hoặc 8 , 4, 2 .

Cách 2 : Nếu a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân thì : $b^2=a.c$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=a^2+c^2+2ac-b^2$$

$$=(a+c)^2-b^2=(a-b+c)(a+b+c) .$$

Theo giả thiết, ta có : $\begin{cases} a+b+c=14 \\ a^2+b^2+c^2=84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=14 \\ 14(a-b+c)=84 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=14 \\ a-b+c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=4 \\ a+c=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=10 \\ a.c=16 \end{cases}$$

Do đó a , c là các nghiệm của phương trình : $x^2-10x+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy ta được : $a=2$, $b=4$, $c=8$ hoặc $a=8$, $b=4$, $c=2$.

b) Gọi 4 số cần tìm là : $\frac{a}{x^3},\frac{a}{x}$, ax ,$ax^3$ dễ thấy chúng là các số hạng liên tiếp của cấp số nhân có công bội $q=x^2$. Theo giả thiết, ta có :

$$\begin{cases} \frac{a}{x^3}+\frac{a}{x}+ax+ax^3=15 \\ \frac{a^2}{x^6}+\frac{a^2}{x^2}+a^2x^2+a^2x^6=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(x^3+\frac{1}{x^3}+x+\frac{1}{x}\right)=15 \\ a^2\left(x^6+\frac{1}{x^6}+x^2+\frac{1}{x^2}\right)=85 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $t=x+\frac{1}{x},\ \left(|t|\ge 2\right) \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$; $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$;

$x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2-2=\left(t^3-3t\right)^2-2$, lúc đó (*) trở thành :

$$\begin{cases} a\left(t^3-3t+t\right)=15 \\ a^2\left[\left(t^3-3t\right)^2-2+t^2-2\right]=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\left(t^3-2t\right)^2=225 \\ a^2\left[\left(t^3-3t\right)^2+t^2-4\right]=85 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(t^3-3t+t\right)^2}{\left(t^3-3t\right)^2+t^2-4}=\frac{45}{17} \Leftrightarrow -28t^6+202t^4-382t^2+180=0$$

$$\Leftrightarrow -2\left(t^2-2\right)\left(2t^2-9\right)\left(7t^2-5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2=2 \\ t^2={}^5\!/_7 \\ t^2={}^9\!/_2 \end{array}\right. \Rightarrow t^2={}^9\!/_2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^4-5x^2+2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \Rightarrow a=2\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \Rightarrow a=-2\sqrt{2} \end{array}\right. \vee x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a=2\sqrt{2} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy các số cần tìm là : 1 , 2 , 4 , 8 hoặc 8 , 4 , 2 , 1 .

3. Các bài toán ứng dụng tính chất của cấp số

3.1. Phương pháp: Dựa vào các công thức về tính chất các số hạng của cấp số cộng hoặc cấp số nhân:

- Nếu (u_n) là cấp số cộng thì : $u_k=\frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$, $\left(\forall k\ge 2,\ k\in \mathbb{N}^*\right)$
- Nếu (u_n) là cấp số nhân thì: $u_k^2=u_{k-1}.u_{k+1}$, $\left(\forall k\ge 2,\ k\in \mathbb{N}^*\right)$.

3.2. Chú ý : Ta có thể dễ dàng chứng minh được:

- a, b, c lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow a+c=2b$.
- a, b, c lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow a.c=b^2$.

3.3. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Cho ba số a , b , c lập thành cấp số cộng. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $a^2+2bc=c^2+2ab$; b) $a^2+8bc=(2b+c)^2$.

Lời giải

a) a, b, c lập thành cấp số cộng $\Rightarrow a+c=2b$

$\Rightarrow a^2+2bc=a^2+(a+c)c=a^2+ac+c^2=c^2+(a+c)a=c^2+2ba$ (đpcm).

b) a, b, c lập thành cấp số cộng $\Rightarrow a+c=2b$

$\Rightarrow a^2+8bc=a^2+4(a+c)c$

$=a^2+4ac+4c^2=(a+2c)^2=(a+c+c)^2=(2b+c)^2$.

Ví dụ 2. Cho ba số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng có công sai $d\ne 0$.

Chứng minh rằng ba số $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

Ta có : $\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{b-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{b^2-a^2}{(b+a)(b+c)(c+a)}$;

$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}=\frac{c-b}{(a+b)(a+c)}=\frac{c^2-b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$;

Do a^2,b^2,c^2 lập thành một cấp số cộng nên

$a^2+c^2=2b^2 \Leftrightarrow c^2-b^2=b^2-a^2 \Rightarrow \frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}$

Nên $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ 3. Cho ba số a , b , c lập thành cấp số nhân.Chứng minh các hệ thức sau:

a) $(a^2+b^2).(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$;

b) $a^2+4c^2-4ab+8bc=(a-2b-2c)^2$.

Lời giải

a) a , b , c lập thành cấp số nhân $\Rightarrow a.c=b^2$

$\Rightarrow (ab+bc)^2=b^2(a+c)^2=b^2\left(a^2+2ac+c^2\right)$

$=b^2\left(a^2+b^2+b^2+c^2\right)=\left(a^2b^2+b^4\right)+b^2\left(b^2+c^2\right)$

$=\left(a^2b^2+a^2c^2\right)+b^2\left(b^2+c^2\right)=a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2\left(b^2+c^2\right)$

$$=(a^2+b^2).(b^2+c^2)\ \text{(đpcm)}.$$

b) a , b , c lập thành cấp số nhân $\Rightarrow a.c=b^2$

$$\Rightarrow (a-2b-2c)^2=\left[a-2(b+c)\right]^2=a^2-4ab-4ac+4b^2+8bc+4c^2$$

$$=a^2-4a(b+c)+4(b+c)^2=a^2-4ab+8bc+4c^2\ \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu 3 số $\frac{2}{y-x},\frac{1}{y},\frac{2}{y-z}$ lập thành một cấp số cộng thì 3 số x , y , z lập thành một cấp số nhân .

Lời giải

Vì 3 số $\frac{2}{y-x},\frac{1}{y},\frac{2}{y-z}$ lập thành một cấp số cộng, suy ra :

$$\frac{2}{y-x}+\frac{2}{y-z}=\frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow 2y^2-y(x+z)=(y-x)(y-z)$$

$$\Rightarrow 2y^2-yx-yz=y^2-xy-yz+xz$$

$\Rightarrow y^2=xz \Rightarrow x , y , z$ lập thành một cấp số nhân .

Ví dụ 5. Tìm các số dương a và b sao cho $2a+1$, $2a-b$, $2b+1$ lập thành một cấp số cộng và $(b+3)^2$, $ab+4$, $(a-1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có : $\begin{cases}2a+1+2b+1=2(2a-b)\\(b+3)^2(a-1)^2=(ab+4)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b=1\\(b+3)|a-1|=ab+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1+2b\\(b+3).|2b|=b+2b^2+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1+2b\\5b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{13}{5}\\b=\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

4. Tính tổng hữu hạn

4.1. Phương pháp: Để tính một tổng có hữu hạn phần tử ta có thể làm như sau:

- Xét xem các số hạng của nó có lập thành một cấp số cộng hoặc cấp số nhân hay không, nếu chưa hãy biến đổi các số hạng hoặc tách thành các tổng khác nhau mà các số hạng của chúng tạo thành cấp số.
- Dựa vào công thức số hạng tổng quát của cấp số để tìm xem các tổng cần tính có bao nhiêu số hạng.
- Tính các tổng trên dựa vào các công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số, rồi suy ra kết quả.

4.2. Chú ý:

- (u_n) lập thành cấp số cộng thì:

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n=\frac{n(u_1+u_n)}{2}=\frac{n[2u_1+(n-1)d]}{2}.$$

- (u_n) lập thành cấp số nhân thì:

$$\left[\begin{array}{ll}S_n=u_1+u_2+...+u_n=nu_1 & \text{khi } q=1\\ S_n=u_1+u_2+...+u_n=\dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{khi } q\neq 1\end{array}\right.$$

4.3. Các ví dụ minh họa :

Ví dụ 1. Tính các tổng sau :

a) $A=15+20+25+\cdots+7515$;

b) $B=1000^2-999^2+998^2-997^2+\cdots+2^2-1^2$.

Lời giải

a) Ta thấy các số hạng của tổng $A=15+20+25+\cdots+7515$ tạo thành một cấp số cộng có $u_1=15$, $d=5$, giả sử tổng trên có n số hạng thì

$$u_n=7515\Leftrightarrow u_1+(n-1)d=u_n\Leftrightarrow 15+(n-1)5=7515\Leftrightarrow n=1501.$$

Vậy : $A=S_{1501}=\dfrac{1501(2.15+1500.5)}{2}=5\,651\,265$.

b) $B=1000^2-999^2+998^2-997^2+\cdots+2^2-1^2$

$$=1(1000+999)+1(998+997)+\cdots\cdots+1(2+1)$$

$$=1999+1995+\cdots\cdots+3$$

Ta thấy các số hạng của tổng $B=1999+1995+\cdots\cdots+3$ tạo thành một cấp số cộng có $u_1=1999$, $d=-4$, giả sử tổng trên có n số hạng thì

$$u_n=3\Leftrightarrow 1999+(n-1)(-4)=3\Leftrightarrow n=500.$$

Vậy : $B=S_{500}=\dfrac{500(1999+3)}{2}=5\,000\,500$.

Ví dụ 2. Tính các tổng sau :

a) $A=-27+81-243+\cdots+531441$; b) $B=9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots9}_{(n\text{ số }9)}$.

Lời giải

a) Ta thấy các số hạng của tổng $A=-27+81-243+\cdots+531441$ tạo thành một cấp số nhân có $u_1=-27$, $d=-3$, giả sử tổng trên có n số hạng thì :

$$u_n=531441\Leftrightarrow u_1q^{n-1}=u_n$$

$$\Leftrightarrow -27.(-3)^{n-1}=531441\Leftrightarrow(-3)^{n-1}=(-3)^9\Leftrightarrow n=10.$$

Vậy: $A=S_{10}=\dfrac{u_1(1-q^{10})}{1-q}=\dfrac{-27(1-3^{10})}{4}=398574$.

b) $B = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underset{(n\ \text{số } 9)}{99\cdots9} = 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \cdots\cdots + 10^n - 1$

$$= 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots\cdots + 10^n - n = \frac{10\left(10^n - 1\right)}{9} - n.$$

Ví dụ 3. Tính các tổng sau :

a) $A = 1 + 2.2 + 3.2^2 + ... + 100.2^{99}$;

b) $B = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3^2 + \frac{1}{3^2}\right)^2 + \cdots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$.

Lời giải

a) $A = 1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + \cdots\cdots + 100.2^{99}$ (1)

$\Rightarrow 2.A = 2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \cdots\cdots + 99.2^{99} + 100.2^{100}$ (2)

Lấy (1) trừ (2), ta được : $-A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots\cdots + 2^{99} - 100.2^{100}$

$$\Rightarrow A = 100.2^{100} - \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots\cdots + 2^{99}\right)$$

$$= 100.2^{100} - \frac{2^0\left(2^{100} - 1\right)}{2 - 1} = 99.2^{100} + 1.$$

b) $B = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3^2 + \frac{1}{3^2}\right)^2 + \cdots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$

$$= 3^2 + 3^4 + \cdots\cdots + 3^{2n} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots\cdots + \frac{1}{3^{2n}} + 2n$$

$$= \frac{3^2\left(3^{2n} - 1\right)}{8} + \frac{\frac{1}{3^2}\left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right)}{\frac{8}{3^2}} + 2n = \frac{9\left(3^{2n} - 1\right)}{8} + \frac{3^{2n} - 1}{8.3^{2n}} + 2n$$

$$= \frac{\left(3^{2n} - 1\right)\left(9.3^{2n} + 1\right)}{8.3^{2n}} + 2n.$$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng, khi đó cho biết số hạng đầu và công sai của nó:

a) $u_n = 5n - 3$; b) $u_n = \frac{2n + 1}{3}$; c) $u_n = n^3$;

d) $u_n = 4^n + 1$; e) $u_n = \frac{4 - 3n}{5}$; f) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$.

Bài 2. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_2 + u_5 = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$; c) $\begin{cases} u_2 + u_4 = 5 \\ u_1^2 + u_5^2 = 25 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1^3 + u_{15}^3 = 302094 \\ S_{15} = 585 \end{cases}$; e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$.

Bài 3. a) Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.

b) Giữa các số 4 và 67 hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.

Bài 4. a) Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng là 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 1176.

Bài 5. a) Số đo các góc của một đa giác lồi có 9 cạnh lập thành một cấp số cộng có công sai $d = 3^0$. Tìm số đo của các góc đó.

b) Số đo các góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số cộng và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. Tìm số đo các góc đó.

Bài 6. Cho cấp số cộng biết $u_{2000} + u_{2011} = 500$. Tính tổng 4010 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Bài 7. Chứng minh rằng nếu 3 số a , b , c lập thành một cấp số cộng thì :

$$3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 6(a - b)^2 = (a + b + c)^2.$$

Bài 8. Chứng minh rằng nếu 3 số a , b , c lập thành một cấp số cộng thì các số x , y , z cũng lập thành một cấp số cộng, biết:

a) $x = b^2 + bc + c^2$; $y = c^2 + ca + a^2$; $z = a^2 + ab + b^2$.

b) $x = a^2 - bc$; $y = b^2 - ca$; $z = c^2 - ab$.

Bài 9. Tìm x để 3 số a , b , c lập thành một cấp số cộng, với:

a) $a = 10 - 3x$; $b = 2x^2 + 3$; $c = 7 - 4x$.

b) $a = x + 1$; $b = 3x - 2$; $c = x^2 - 1$.

Bài 10. Tìm các nghiệm số của phương trình: $4x^3 - 6\sqrt{6}x^2 + 14x - \sqrt{6} = 0$, biết rằng các nghiệm số phân biệt và tạo thành một cấp số cộng.

Bài 11. Tìm các giá trị của m để phương trình : $x^4 - 2(m + 2)x^2 + 2m + 3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

Bài 12. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = a\ ,\ (a \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = 3 - 2u_n\ ,\ (n \geq 1) \end{cases}$. Tìm các giá trị của a để dãy số (u_n) là cấp số cộng.

Bài 13. Cho cấp số cộng (u_n)

a) Chứng minh : $u_k = \frac{u_{k-m} + u_{k+m}}{2}, \left(\forall m, k \in \mathbb{N}^*,\ m < k\right)$.

b) Tính tổng $2k - 1$ số hạng đầu tiên của (u_n), biết $u_{k-m} + u_{k+m} = a$.

Bài 14. Cho dãy số (u_n), biết tổng n số hạng đầu tiên : $S_n = \frac{n(1-2n)}{2}$

a) Hãy xác định số hạng tổng quát của (u_n).

b) Chứng minh (u_n) là một cấp số cộng, tìm công sai của nó.

Bài 15. Cho cấp số cộng (u_n). Chứng minh :

a) $\frac{1}{u_1.u_2} + \frac{1}{u_2.u_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{u_{n-1}u_n} = \frac{n-1}{u_n.u_1}$.

b) $\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1}}$, $(u_n > 0)$

Bài 16. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2, (\forall n \geq 1) \end{cases}$

Xét dãy số (v_n) biết : $v_n = u_{n+1} - u_n$, $(\forall n \geq 1)$

a) Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số cộng, tìm số hạng đầu và công sai của nó.

b) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Bài 17. Trong các dãy số sau đây dãy nào là cấp số nhân, nếu phải hãy tìm công bội của nó.

a) $u_n = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n$; b) $u_n = n + 3$;

c) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}u_n \end{cases}$

Bài 18. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1^2 + u_3^2 = 50 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1.u_2.u_3 = 64 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 14 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases}$, $(q > 0)$; d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$

Bài 19. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân biết:

$$8u_2 - 5\sqrt{5}u_5 = 0 \text{ và } u_1^3 + u_3^3 = 5.$$

Bài 20. a) Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

b) Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

Bài 21. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Bài 22. a) Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

b) Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Bài 23. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Bài 24. Số số hạng của một cấp số nhân là một số chẵn. Tổng tất cả các số hạng của nó lớn gấp 3 lần tổng các số hạng có chỉ số lẻ. Xác định công bội của cấp số nhân đó.

Bài 25. Bốn số a, b, c, d lập thành cấp số nhân. Chứng minh :

a) $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$;

b) $(ab+bc+cd)^2 = (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$;

c) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$.

Bài 26. Chứng minh:

a) Nếu a, b, c lập thành một cấp số nhân thì ab, b^2, cb cũng lập thành một cấp số nhân.

b) Nếu bốn số dương a, b, c, d lập thành cấp số nhân thì ba số: $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{cd}$ cũng lập thành cấp số nhân.

Bài 27. Chứng minh rằng với mọi m phương trình :

$$x^3 - (m^2+3)x^2 + (m^2+3)x - 1 = 0$$

luôn có ba nghiệm lập thành cấp số nhân.

Bài 28. Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\frac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Bài 29. Cho dãy số (u_n), biết tổng n số hạng đầu tiên : $S_n = \frac{5^n - 3}{5^{n-1}}$

a) Hãy xác định số hạng tổng quát của (u_n).

b) Chứng minh (u_n) là một cấp số nhân, tìm công bội của nó.

Bài 30. Cho cấp số nhân (u_n) có $q \neq 0$, $u_1 \neq 0$

a) Chứng minh : $|u_k| = \sqrt{u_{k-m} \cdot u_{k+m}}$, $(\forall m, k \in \mathbb{N}^*, m < k)$.

b) Chứng minh : $u_k = u_m \cdot q^{k-m}$.

Bài 31. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}, (\forall n \geq 2) \end{cases}$

Xét dãy số (v_n) biết : $v_n = u_{n+1} - u_n$, $(\forall n \geq 1)$

a) Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số nhân.

b) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Bài 32. Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Bài 33. Tìm 4 số trong đó ba số đầu là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, còn ba số sau là ba số hạng kế tiếp của một cấp số cộng; tổng hai số đầu và cuối bằng 32, tổng hai số giữa bằng 24.

Bài 34. Tìm các số x, y sao cho $x+3y$, $5x-2y$, $x+5y$ lập thành một cấp số cộng và $(x-1)^2$, $xy-3$, $(y+2)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Bài 35. Chứng minh các dãy (u_n) sau vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân

a) $(u_n):\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+4}{4}, (\forall n \ge 1) \end{cases}$; b) $(u_n):\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+12}, (\forall n \ge 1) \end{cases}$

Bài 36. Tính các tổng sau :

a) $A = 7+77+777+\ldots+\underbrace{777\ldots7}_{(n\text{ số }7)}$;

b) $B = 15+155+1555+\ldots+1\underbrace{555\cdots5}_{(n\text{ số }5)}$;

c) $C = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots + \left(x^{2011}+\dfrac{1}{x^{2011}}\right)^2, (x \ne 0)$;

d) $D = 1+2.3+3.3^2+\cdots+2010.3^{2009}$;

e) $E = 1+4.5+7.5^2+\cdots+(3n-2).5^n$;

f) $F = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$;

g) $G = (2n)^2-(2n-1)^2+(2n-2)^2-(2n-3)^2+\cdots+2^2-1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC – DÃY SỐ

Bài 1. *Hướng dẫn :* Các bạn tự chứng minh bước cơ sở.

a) Đẳng thức khi $n = k+1$ là :

$$1.4+2.7+\ldots+k(3k+1)+(k+1)(3k+4) = (k+1)(k+2)^2$$

Vế trái : $1.4+2.7+\ldots+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)$

$$= k(k+1)^2+(k+1)(3k+4)$$

$$= (k+1)(k^2+4k+4) = (k+1)(k+2)^2 \text{ bằng vế phải .}$$

b) Đẳng thức khi $n = k+1$ là :

$$1+3+6+\cdots\cdots+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

Vế trái : $1+3+6+\cdots\cdots+\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{6}(k+3) .$$

c) Đẳng thức khi $n = k+1$ là :

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2 = \frac{(k+1)\left[4(k+1)^2-1\right]}{3}$$

Vế trái : $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2$

$$= \frac{k(4k^2-1)}{3}+(2k+1)^2 = \frac{(2k+1)}{3}\left[k(2k-1)+3(2k+1)\right]$$

$$= \frac{(2k+1)}{3}(2k^2+5k+3) = \frac{(2k+1)}{3}(k+1)(2k+3)$$

$$= \frac{k+1}{3}(2k+1)(2k+3) = \frac{k+1}{3}\left[2(k+1)-1\right]\left[2(k+1)+1\right]$$

$$= \frac{(k+1)\left[4(k+1)^2-1\right]}{3} \text{ bằng vế phải .}$$

d) Đẳng thức khi $n = k+1$ là:

$$2^2+4^2+6^2+\cdots\cdots+(2n)^2+(2n+2)^2 = \frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$$

Vế trái : $2^2+4^2+6^2+\cdots\cdots+(2n)^2+(2n+2)^2 = \dfrac{2k(k+1)(2k+1)}{3}+4(k+1)^2$

$$= \frac{2(k+1)}{3}\left[k(2k+1)+6(k+1)\right] = \frac{2(k+1)}{3}(2k^2+7k+6)$$

$$= \frac{2(k+1)}{3}(k+2)(2k+3) \text{ bằng vế phải .}$$

e) Đẳng thức khi $n=k+1$ là :

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{k.(k+1).(k+2)}+\frac{1}{(k+1).(k+2).(k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2).(k+3)}$$

Vế trái :

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{k.(k+1).(k+2)}+\frac{1}{(k+1).(k+2).(k+3)}$$
$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1).(k+2).(k+3)}$$
$$=\frac{1}{4(k+1).(k+2)(k+3)}\left[k(k+3)^2+4\right]$$
$$=\frac{1}{4(k+1).(k+2)(k+3)}\left(k^3+6k^2+9k+4\right)$$
$$=\frac{1}{4(k+1).(k+2)(k+3)}(k+1)^2(k+4)$$
$$=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2).(k+3)} \text{ bằng vế phải .}$$

f) Đẳng thức khi $n=k+1$ là :

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

Vế trái : $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$

$$=\frac{k+1}{2k}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{(k+1)^2-1}{2k(k+1)}=\frac{k(k+2)}{2k(k+1)}=\frac{k+2}{2(k+1)}.$$

g) Đẳng thức khi $n=k+1$ là :

$$\sin x+\sin 2x+\cdots\cdots+\sin kx+\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{(k+2)x}{2}.\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Vế trái : $\sin x+\sin 2x+\cdots\cdots+\sin kx+\sin(k+1)x$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}.\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+2\sin\frac{(k+1)x}{2}.\cos\frac{(k+1)x}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{kx}{2}+2\cos\frac{(k+1)x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\right]$$
$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{kx}{2}+\sin\frac{(k+2)x}{2}-\sin\frac{kx}{2}\right]$$
$$=\frac{\sin\frac{(k+2)x}{2}.\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ bằng vế phải .}$$

h) Đẳng thức khi $n=k+1$ là : $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{2}}}}}_{(k+1\ \text{dấu căn})}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$

Vế trái : $\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{2}}}}_{(k\ \text{dấu căn})}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$

$$=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\frac{\pi}{2^{k+1}}}{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} \text{ bằng vế phải.}$$

Bài 2. *Hướng dẫn:* Các bạn tự chứng minh bước cơ sở.

a) Bất đẳng thức khi $n=k+1$ là : $2^{k+3}>2k+7$

Vế trái : $2^{k+3}=2.2^{k+2}>2(2k+5)=(2k+7)+2k+3>2k+7$

Do $2k+3>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Bất đẳng thức khi $n=k+1$ là :

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

Vế trái :

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=2-\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}$$
$$=2-\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)^2}<2-\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}=2-\frac{1}{k+1}$$

c) Bất đẳng thức khi $n=k+1$ là:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Vế trái : $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}$

Ta chỉ việc chứng minh : $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$

Thật vậy : $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$

$$\Leftrightarrow\frac{(2k+1)^2}{(3k+1)4(k+1)^2}<\frac{1}{3k+4}$$

$\Leftrightarrow(2k+1)^2(3k+4)<(3k+1).4.(k+1)^2\Leftrightarrow -k<0$ (đúng) .

d) Bất đẳng thức khi $n=k+1$ là :

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}>\frac{13}{24}$$

Vế trái : $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{2(k+1)-(2k+1)}{2(k+1)(2k+1)}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$$

$$>\frac{13}{24}+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}>\frac{13}{4}\quad\text{(đpcm)} .$$

e) Bất đẳng thức khi $n=k+1$ là : $3^k>(k+1)(k+3)$

Vế trái : $3^k=3.3^{k-1}>3k(k+2)$

$$=3k^2+6k=k^2+4k+3+2k^2+2k-3$$

$$=(k+1)(k+3)+2k(k+1)-3>(k+1)(k+3)$$

Vì $2k(k+1)-3>0,\ (\forall k\geq 4)$.

f) Bất đẳng thức khi $n=k+1$ là :

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}>1$$

Vế trái : $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$$

$$>1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3(k+1)}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=1+\frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)}>1$$

Do $\frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)}>0,\ (\forall k\in\mathbb{N}^*)$.

Bài 3. *Hướng dẫn :* Các bạn tự chứng minh bước cơ sở.

a) Giả sử : $u_k=k^3+2k\ \vdots\ 3$

$$\Rightarrow u_{k+1}=(k+1)^3+2(k+1)$$

$$=k^3+2k+3k^2+3k+3=u_k+3(k^2+k+1)\ \vdots\ 3$$

b) Giả sử : $u_k=7.2^{2k-2}+3^{2k-1}\ \vdots\ 5$

$$\Rightarrow u_{k+1}=7.2^{2k}+3^{2k+1}$$

$$=4.(7.2^{2k-2})+9(3^{2k-1})=4(7.2^{2k-2}+3^{2k-1})+5.(3^{2k-1})\ \vdots\ 5$$

c) Giả sử : $u_k=k^3+11k\ \vdots\ 6$

$$\Rightarrow u_{k+1}=(k+1)^3+11(k+1)$$

$$=k^3+11k+3k^2+3k+12=u_k+3(k+1)(k+2)\ \vdots\ 6$$

Do $(k+1)(k+2)\ \vdots\ 2$ (tích 2 số tự nhiên liên tiếp) $\Rightarrow 3(k+1)(k+2)\ \vdots\ 6$.

d) Giả sử : $u_k=13^k-1\ \vdots\ 6$

$$\Rightarrow u_{k+1}=13^{k+1}-1=13.13^k-1=13(13^k-1)+12=13.u_k+12\ \vdots\ 6$$

e) Giả sử : $u_k=11^{k+1}+12^{2k-1}\ \vdots\ 133$

$$\Rightarrow u_{k+1}=11^{k+2}+12^{2k+1}=11\cdot 11^{k+1}+144\cdot 12^{2k-1}$$

$$=144\cdot(11^{k+1}+12^{2k-1})-133\cdot 11^{k+1}\ \vdots\ 133$$

f) Giả sử : $u_k=5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1}\ \vdots\ 19$

$$\Rightarrow u_{k+1}=5\cdot 2^{3k+1}+3^{3k+2}=8.(5\cdot 2^{3k-2})+27\cdot 3^{3k-1}$$

$$=8.(5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1})+19\cdot 3^{3k-1}\ \vdots\ 19$$

Bài 4. *Hướng dẫn :* Các bạn tự chứng minh bước cơ sở .

a) Bất đẳng thức khi $n=k+1$ là : $(1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a$

Vế trái : $(1+a)^{k+1}=(1+a).(1+a)^k\geq(1+a)(1+ka)$

$$=1+(k+1)a+ka^2\geq 1+(k+1)a .$$

b) Bất đẳng thức khi $n=k+1$ là : $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$

Vế phải : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}=\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^k\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{a^k+b^k}{2}$

Mà $\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{a^k+b^k}{2}=\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+a.b^k+b.a^k}{4}$

$$=\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}-\frac{a^{k+1}+b^{k+1}-a.b^k-ba^k}{4}$$

$$=\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}-\frac{a\left(a^k-b^k\right)-b\left(a^k-b^k\right)}{4}$$

$$=\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}-\frac{\left(a^k-b^k\right)(a-b)}{4}\le\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$$

Do $\frac{\left(a^k-b^k\right)(a-b)}{4}\ge 0$. Suy ra điều phải chứng minh .

c) Bạn đọc tự giải.

Bài 5. *Đáp số:*

a) $u_n=-1$; b) $u_n=1+\frac{1}{2^{n+1}}$; c) $u_n=5n-4$;

d) $u_n=\frac{1}{n}$; e) $u_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$; f) $u_n=5^{n-1}$;

g) $u_n=5.3^n-6.2^n$; h) $u_n=(n+2).2^{n-1}$.

Bài 6. Xét tính tăng , giảm của dãy số (u_n)

a) $u_n=\frac{n^2+n+1}{n^2+1}=1+\frac{n}{n^2+1}$

$$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}-\frac{n}{n^2+1}=\frac{n^2+n-1}{\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2+1\right)}>0\ ,\ \forall n$$

Vậy (u_n) là dãy tăng .

b) $u_n=\frac{4^n-1}{4^n+5}=1-\frac{6}{4^n+5}$

$$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{6}{4^n+5}-\frac{6}{4^{n+1}+5}=\frac{18.4^n}{\left(4^n+5\right)\left(4^{n+1}+5\right)}>0\ ,\ \forall n$$

Vậy (u_n) là dãy tăng.

c) $u_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n}=\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}>0\ ,\forall n$

$\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}}<1\ ,\ \forall n$. Vậy (u_n) là dãy giảm .

d) $u_n=\frac{\sqrt{n+11}}{n}=\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{11}{n^2}}>\sqrt{\frac{1}{n+1}+\frac{11}{(n+1)^2}}=u_{n+1}\ ,\ \forall n$.

Vậy (u_n) là dãy giảm .

e) $(u_n):\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{u_n+3}\end{cases}$

Ta có : $u_1=3\ ,\ u_2=3\ ,\ u_3=3\ ,\ \cdots\cdots,\ u_n=3\ ,\ \forall n$

Dễ dàng chứng minh được bằng quy nạp . Vậy dãy số đã cho không đổi .

f) $(u_n):\begin{cases}u_1=\sqrt{6}\\ u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\end{cases}$

Ta có: $u_{n+1}^2-u_n^2=6+u_n-u_n^2=(u_n+2)(3-u_n)$

Mặt khác : $0<u_n<3\ ,\forall n$ (Chứng minh bằng quy nạp)

Do đó : $u_{n+1}^2-u_n^2>0\Leftrightarrow 0<u_n<u_{n+1}\ ,\forall n$. Vậy (u_n) là dãy tăng .

Bài 7. Xét tính bị chặn của các dãy số

a) $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$, dễ thấy $\frac{1}{2}\le u_n<1\ ,\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$.Vậy (u_n) là bị chặn.

b) $u_n=n^2+4$, dễ thấy $u_n\ge 5\ ,\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$.Vậy (u_n) là bị chặn dưới. Mặt khác $\forall M>4$ lớn tùy ý, ta luôn tìm được $N_0=\sqrt{M-4}$ để sao cho: $\forall n>N_0$ ta đều có $u_n>M$, tức là không thể tìm được số $M:u_n\le M,\forall n$. Tức là (u_n) không bị chặn trên

c) $u_n=\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}$

Ta có : $\begin{cases}0<\dfrac{1}{n}\le 1\ ,\forall n\in\mathbb{N}^*\\ -1\le\cos\dfrac{1}{n}\le 1\ ,\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}\Rightarrow -1<u_n\le 2\ ,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy (u_n) là bị chặn .

d) $u_n=\frac{3n^2+2n+1}{n^2+2}=3+\frac{2n-5}{n^2+2}$

Mặt khác : $-1\le\frac{2n-5}{n^2+2}<1\ ,\ \forall n\Rightarrow 2\le u_n<4\ ,\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Vậy (u_n) là bị chặn.

Bài 8. Xét tính bị chặn của các dãy số.

a) $u_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$$

Do đó : $0<u_n<\frac{1}{2}\ ,\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$. Vậy (u_n) là bị chặn .

b) Ta thấy :

$$0<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

$$\Leftrightarrow 0<u_n<\frac{n}{\sqrt{n^2}}=1,\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right).$$

Vậy (u_n) là bị chặn .

Bài 9. Xét tính tăng , giảm và bị chặn của các dãy số

a) $(u_n):\begin{cases}u_1=\sqrt{2}\\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\end{cases}$

Ta có : $u_{n+1}^2-u_n^2=2+u_n-u_n^2=(u_n+1)(2-u_n)$

Mặt khác : $0<u_n<2,\forall n$ (Chứng minh bằng quy nạp), nên dãy bị chặn.

Do đó : $u_{n+1}^2-u_n^2>0\Leftrightarrow 0<u_n<u_{n+1},\forall n$. Vậy (u_n) là dãy tăng.

c) Ta có : $u_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}$

$$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}=\frac{-1}{2(n+1)}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Vậy (u_n) là dãy giảm .

Mặt khác : $0<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1,\forall n$

Nên : $0<u_n<1,\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$. Vậy (u_n) bị chặn .

Bài 10. $(u_n):\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\frac{2}{u_n^2+1}\end{cases}$. Ta chứng minh bằng quy nạp : $u_n=1,\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Bài 11. Ta có thể viết : $u_n=\frac{b\cdot 2n^2+1}{n^2+3}=\frac{2b\left(n^2+3\right)-6b+1}{n^2+3}=2b+\frac{1-6b}{n^2+3}$

$$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=(1-6b)\left[\frac{1}{(n+1)^2+3}-\frac{1}{n^2+3}\right]$$

$$=(1-6b).\frac{-(2n+1)}{\left(n^2+3\right)\left[(n+1)^2+3\right]}$$

Vì $\frac{-(2n+1)}{\left(n^2+3\right)\left[(n+1)^2+3\right]}<0,\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

a) (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n<0\Leftrightarrow 1-6b>0\Leftrightarrow b<\frac{1}{6}$.

b) (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n>0\Leftrightarrow 1-6b<0\Leftrightarrow b>\frac{1}{6}$.

Bài 12. Trước hết ta chứng minh $u_n=u_{n+3},\forall n\geq 1\Rightarrow S_{15}=5\left(u_1+u_2+u_3\right)$

Mà $u_1=1,\ u_2=-\frac{1}{2},\ u_3=-\frac{1}{2}\Rightarrow S_{15}=0$.

§2. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

Bài 1. a) $u_n=5n-3$ là cấp số cộng có $d=5$.

b) $u_n=\frac{2n+1}{3}$ là cấp số cộng có $d=\frac{2}{3}$.

c) $u_n=n^3$ không phải là cấp số cộng .

d) $u_n=4^n+1$ không phải là cấp số cộng .

e) $u_n=\frac{4-3n}{5}$ là cấp số cộng có $d=\frac{3}{5}$.

f) $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=3-u_n\end{cases}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=3-2u_n$ thay đổi theo n nên dãy số trên không phải là cấp số cộng .

Bài 2. *Đáp số :*

a) $u_1=36,\ d=-13$.

b) $u_1=1,\ d=3$;

c) $u_1=0,\ d=\frac{5}{4}$ hoặc $u_1=5,\ d=-\frac{5}{4}$.

d) $u_1=11,\ d=4$ hoặc $u_1=67,\ d=-4$.

e) $u_1=2,\ d=2$ hoặc $u_1=8,\ d=-2$.

Bài 3. *Đáp số :*

a) Sáu số cần tìm là : 11 , 15 , 19 , 23 , 27 , 31

b) Cấp số cộng có $u_1=4,\ d=3$, từ đó suy ra các số cần tìm .

Bài 4. a) Ba số cần tìm là : 4, 9 ,14 hoặc 14 , 9 , 4 .

b) Bốn số cần tìm là : –14, 0, 14, 28 hoặc 28, 14, 0, –14 .

Bài 5. a) Số đo các góc :

$128^0,\ 131^0,\ 134^0,\ 137^0,\ 140^0,\ 143^0,\ 146^0,\ 149^0,\ 152^0$

Chú ý : Tổng các góc trong của đa giác có n cạnh là : $(n-2).180^0$.

b) Số đo các góc : $30^0,\ 70^0,\ 110^0,\ 150^0$.

Bài 6. $u_{2000}+u_{2011}=500\Leftrightarrow u_1+u_{4010}=500\Rightarrow S_{4010}=1002500$.

Bài 7. Nếu a , b , c lập thành một cấp số cộng thì : $a+c=2b$

Vế trái : $3\left(a^2+b^2+c^2\right)-6(a-b)^2=3c^2-3a^2+12ab-3b^2$

$$=3(c-a)(c+a)+12ab-3b^2=6(c-a)b+12ab-3b^2$$

$$=6b(c-a+2a)-3b^2=6b(a+c)-3b^2$$

$$=12b^2-3b^2=(3b)^2=(a+b+c)^2$$ bằng vế phải.

Bài 8. a) Nếu a, b, c lập thành một cấp số cộng thì $a + c = 2b$

Khi đó : $x + z = 2b^2 + bc + a^2 + c^2 + ab = (2b)^2 + a^2 + c^2$

$$= (a + c)^2 + a^2 + c^2 = 2(a^2 + ac + c^2) = 2y$$

Tức là x, y, z cũng lập thành một cấp số cộng .

b) $x + z = a^2 + c^2 - bc - ab = a^2 + c^2 - 2b^2 = (a + c)^2 - 2ac - 2b^2$

$$= 4b^2 - 2b^2 - 2ac = 2(b^2 - ac) = 2y .$$

Tức là x, y, z cũng lập thành một cấp số cộng .

Bài 9. a) a, b, c lập thành một cấp số cộng

$$\Rightarrow a + c = 2b$$

$$\Leftrightarrow 17 - 7x = 2(2x^2 + 3) \Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{11}{4} \end{array}\right. .$$

b) a, b, c lập thành một cấp số cộng

$$\Rightarrow a + c = 2b$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 2(3x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Bài 10. Vì phương trình có các nghiệm x_1, x_2, x_3 phân biệt và tạo thành một cấp số cộng , nên :

$4x^3 - 6\sqrt{6}x^2 + 14x - \sqrt{6} = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ và $x_1 + x_3 = 2x_2$

Ta có : $4x^3 - 6\sqrt{6}x^2 + 14x - \sqrt{6} = 4x^3 - 4(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + Mx + N$

$$\Rightarrow 4(x_1 + x_2 + x_3) = 6\sqrt{6} \Rightarrow 12x_2 = 6\sqrt{6} \Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ nên :

$$4x^3 - 6\sqrt{6}x^2 + 14x - \sqrt{6} = 4\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x^2 - \sqrt{6}x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x^2 - \sqrt{6}x + \dfrac{1}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x = \pm 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right. .$$

Bài 11. Phương trình : $x^4 - 2(m + 2)x^2 + 2m + 3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow t^2 - 2(m + 2)x^2 + 2m + 3 = 0 \text{ có 2 nghiệm : } 0 < t_1 < t_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m + 2)^2 - (2m + 3) > 0 \\ P = 2m + 3 > 0 \\ S = 2(m + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{3}{2} \\ m \neq -1 \end{cases} \quad (*) .$$

Khi đó phương trình đã cho có 4 nghiệm :

$$x_1 = -\sqrt{t_2} ,\ x_2 = -\sqrt{t_1} ,\ x_3 = \sqrt{t_1} ,\ x_4 = \sqrt{t_2}$$

Chúng lập thành cấp số cộng khi

$$x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2) \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$$

Mà $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m + 2) \\ t_1.t_2 = 2m + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10t_1 = 2(m + 2) \\ 9t_1^2 = 2m + 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow 9\left(\frac{m + 2}{5}\right)^2 = 2m + 3 \Leftrightarrow 9m^2 - 14m - 39 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -\dfrac{13}{9} \end{array}\right. ,\ \text{thỏa } (*) .$$

Vậy các giá trị cần tìm là : $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -\dfrac{13}{9} \end{array}\right.$.

Bài 12. Để dãy số (u_n) là cấp số cộng thì $u_{n+1} - u_n = d$ (không đổi)

$$\Rightarrow 3 - 2u_n - u_n = d \Rightarrow u_n = 1 - \frac{d}{3}$$

Tức là (u_n) phải là dãy không đổi , tức là : $u_1 = a = 1 - \dfrac{d}{3} = 1$ (do $d = 0$)

Vậy điều kiện cần để (u_n) là cấp số cộng là $a = 1$.

Ngược lại : khi $a = 1$ thì $(u_n) : \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3 - 2u_n ,\ (n \geq 1) \end{cases} \Rightarrow u_n = 1 ,\ \forall n$

nên (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 0$.

Tức là (u_n) là cấp số cộng khi và chỉ khi $a = 1$.

Bài 13. a) Vì (u_n) là cấp số cộng $\Rightarrow \begin{cases} u_{k-m} = u_1 + (k - m - 1)d \\ u_{k+m} = u_1 + (k + m - 1)d \end{cases}$

$$\Rightarrow u_{k-m} + u_{k+m} = 2\left[u_1 + (k - 1)d\right] = 2u_k \Rightarrow u_k = \frac{u_{k-m} + u_{k+m}}{2} .$$

b) Ta biết : $u_k = \dfrac{u_{k-m} + u_{k+m}}{2} \Rightarrow 2u_k = u_{k-(k-1)} + u_{k+(k-1)} = u_1 + u_{2k-1} = a$

Mà : $S_{2k-1} = \dfrac{(2k - 1)(u_1 + u_{2k-1})}{2} = \dfrac{(2k - 1).2u_k}{2} = \dfrac{(2k - 1).a}{2}$.

Bài 14. a) Ta có : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \dfrac{n(1 - 2n)}{2}$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = \frac{(n - 1)(3 - 2n)}{2}$$

$$\Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}\left(3n - 2n^2 + 2n^2 - 5n + 3\right) = \frac{3-2n}{2}.$$

Vậy số hạng tổng quát của (u_n) là : $u_n = \frac{3}{2} - n$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2} - n - 1 - \frac{3}{2} + n = -1 \Rightarrow (u_n)$ là cấp số cộng có $d = -1$.

Bài 15. Vì (u_n) là cấp số cộng , nên

$$\frac{1}{u_1.u_2} = \frac{1}{d}\cdot\frac{u_2 - u_1}{u_2u_1} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)$$

$$\frac{1}{u_2.u_3} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3}\right)$$

....

$$\frac{1}{u_{n-1}u_n} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_1.u_2} + \frac{1}{u_2.u_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{u_{n-1}u_n} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n}\right)$$

$$= \frac{u_n - u_1}{d.u_1.u_n} = \frac{(n-1)d}{d.u_1.u_n} = \frac{n-1}{u_n.u_1}.$$

b) $$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}$$

$$= \frac{\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}}{u_2 - u_1} + \frac{\sqrt{u_3}-\sqrt{u_2}}{u_3 - u_2} + \cdots + \frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}}{u_n - u_{n-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}}{d} = \frac{u_n - u_1}{d\left(\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1}\right)} = \frac{n-1}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1}}.$$

Bài 16. a) Ta có : $v_n = 3n - 2 \Rightarrow v_{n+1} - v_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3, \forall n$

nên (v_n) là cấp số cộng có $v_1 = 1$, $d = 3$.

b) Do $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_2 - u_1) + u_1$

$= v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_1 + 2$

Mà $v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_1 = S_{n-1} = \frac{(n-1)\left[2v_1 + (n-2)d\right]}{2}$

$$= \frac{(n-1)\left[2 + 3(n-2)\right]}{2} = \frac{(n-1)(3n-2)}{2}$$

Vậy : $u_n = \frac{(n-1)(3n-4)}{2} + 2 = \frac{3n^2 - 4n + 8}{2}$.

Bài 17. a) $u_n = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ là cấp số nhân $q = \frac{1}{2}$

b) $u_n = n + 3$ không phải là cấp số nhân.

c) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n{}^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n \Rightarrow (u_n)$ không phải là cấp số nhân .

d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}u_n \end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7}{5} \Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân có $q = \frac{7}{5}$.

Bài 18. *Đáp số :* a) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = \pm 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u_1 = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u_1 = 12 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$; d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u_1 = 16 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$

Bài 19. *Đáp số :* $u_n = 5.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1}$.

Bài 20. *Đáp số :* a) Bốn số cần chèn là: 80, 40, 20,10 .

b) Bốn số cần chèn là: 81, 27, 9,3 .

Bài 21. *Đáp số :* Ba số cần tìm là: 4, 6, 9 hoặc 9, 6, 4 .

Bài 22. *Đáp số :* a) $u_1 = 2$; b) $q = 2$.

Vì , từ giả thiết $\Rightarrow \begin{cases} u_n = 7.q^{n-1} = 448 \\ S_n = \frac{7\left(q^n - 1\right)}{q-1} = 889 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^{n-1} = 64 \\ \frac{64q - 1}{q-1} = 127 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ n = 7 \end{cases}$

Bài 23. Theo giả thiết , ta có:

$$\begin{cases} u_1 - u_1.q = 35 \\ u_1.q^2 - u_1.q^3 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ q = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} u_1 = -\frac{35}{4} \\ q = 4 \end{cases}$$

Đáp số : $7, -28, 112, -448$ hoặc $-\frac{35}{3}, -\frac{140}{3}, -\frac{560}{3}, -\frac{2240}{3}$.

Bài 24. Theo giả thiết ta có:

$$S_{2k} = 3\left(u_1 + u_3 + \cdots + u_{2k-1}\right) \Rightarrow q \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1\left(1 - q^{2k}\right)}{1-q} = 3u_1\left(1 + q^2 + q^4 + \cdots + q^{2k-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - q^{2k}}{1-q} = 3\frac{1 - q^{2k}}{1-q^2} \Leftrightarrow 1 - q^2 = 3(1-q) \Leftrightarrow q = 2.$$

Bài 25. a , b , c , d lập thành cấp số nhân

$$\Rightarrow b^2 = ac\ ,\ c^2 = bd\ ,\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow bc = ad$$

a) $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$.

$$VT = 2b^2 + 2c^2 + a^2 + d^2 - 2bc - 2ca - 2bd$$
$$= 2ac + 2bd + a^2 + d^2 - 2bc - 2ca - 2bd$$
$$= a^2 + d^2 - 2bc = a^2 + d^2 - 2ad = (a-d)^2 = VP$$

b) $(ab + bc + cd)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$

Ta biết $(ab + bc + cd)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$ ***(B.C.S)***

nhưng vì a , b , c , d lập thành cấp số nhân nên $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$ nên dấu đẳng thức trong bất đẳng thức trên xảy ra , tức là :

$$(ab + bc + cd)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) .$$

c) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$

$$VT = a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = \frac{b^2c^2}{a} + \frac{a^2c^2}{b} + \frac{a^2b^2}{c} = \frac{ac^3}{a} + \frac{b^4}{b} + \frac{a^3c}{c}$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 = VP.$$

Bài 26. a) a , b , c lập thành một cấp số nhân thì $b^2 = ac$

Mà $ab \cdot cb = ac.b^2 = b^4 = (b^2)^2 \Rightarrow ab\ ,b^2\ ,cb$ cũng là cấp số nhân .

b) a , b , c , d lập thành cấp số nhân $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow bc = ad$.

$\Rightarrow \sqrt{ab}.\sqrt{cd} = \sqrt{bc.ad} = \sqrt{(bc)^2} = (\sqrt{bc})^2$, nên $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{cd}$ cũng lập thành cấp số nhân .

Bài 27. Ta có : $x^3 - (m^2+3)x^2 + (m^2+3)x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2 - (m^2+2)x + 1\right] = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ x^2 - (m^2+2)x + 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Xét $x^2 - (m^2+2)x + 1 = 0$ (2) có:

$$\Delta = (m^2+2)^2 - 4 = m^4 + 4m^2 = m^2(m^2+4) \ge 0\ , \forall m$$

Nên (2) luôn có hai nghiệm x_1 , x_3 thỏa $x_1.x_3 = 1$, tức là (1) luôn có 3 nghiệm x_1 , x_2 , x_3 thỏa $x_1.x_3 = (x_2)^2 \Leftrightarrow x_1$, x_2 , x_3 là cấp số nhân.

Bài 28. Giả sử cấp số nhân có công bội là q , cấp số cộng có công sai là d , theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} S_3 = \dfrac{u_1(1-q^3)}{1-q} = \dfrac{148}{9}\ , (q \ne 1) \\ 3u_1 = \dfrac{148}{9}\ , (q = 1) \end{array}\right. \\ u_1q = u_1 + 3d \\ u_1q^2 = u_1 + 7d \end{cases} ,\ (u_1 \ne 0\ , q \ne 0)$$

$$\Rightarrow 7u_1q - 7u_1 = 3u_1q^2 - 3u_1 \Leftrightarrow u_1(7q - 3q^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 3q^2 - 7q + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{148}{27} \\ q = \dfrac{4}{3} \Rightarrow u_1 = 4 \end{array}\right.$$

Vậy 4 số cần tìm là: $\frac{148}{27}, \frac{148}{27}, \frac{148}{27}, \frac{148}{27}$ hoặc $4, \frac{16}{3}, \frac{64}{9}, \frac{256}{27}$.

Bài 29. a) Ta có : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{5^n - 3}{5^{n-1}}$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = \frac{5^{n-1} - 3}{5^{n-2}}$$

$$\Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1} = 5 - \frac{3}{5^{n-1}} - \left(5 - \frac{3}{5^{n-2}}\right) = \frac{3}{5^{n-2}} - \frac{3}{5.5^{n-2}} = \frac{12}{5^{n-1}} .$$

Vậy số hạng tổng quát của (u_n) là : $u_n = \frac{12}{5^{n-1}}$.

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{12}{5^n}}{\frac{12}{5^{n-1}}} = \frac{1}{5} \Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân có $q = \frac{1}{5}$.

Bài 30.

a) $\left.\begin{array}{l} u_{k-m} = u_1.q^{k-m-1} \\ u_{k+m} = u_1.q^{k+m-1} \end{array}\right\} \Rightarrow u_{k-m} \cdot u_{k+m} = u_1^2.q^{2(k-1)} = (u_1.q^{k-1})^2 = u_k^2$

$$\Rightarrow |u_k| = \sqrt{u_{k-m} \cdot u_{k+m}}\ , (\forall m, k \in \mathbb{N}^*, m < k).$$

b) $u_m \cdot q^{k-m} = u_1.q^{m-1}.q^{k-m} = u_1.q^{k-1} = u_k$.

Bài 31.

a) $(u_n) : \begin{cases} u_1 = 1\ , u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}\ , (\forall n \ge 2) \end{cases}$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2(u_n - u_{n-1}), (\forall n \ge 2) \Rightarrow v_n = 2v_{n-1}, (\forall n \ge 2)$

Nên dãy số (v_n) là cấp số nhân có $q = 2$, $v_1 = 1$.

b) Do $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_2 - u_1) + u_1$

$= v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_1 + 1$

Mà $v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_1 = S_{n-1} = \dfrac{1.\left[1 - 2^{n-1}\right]}{1-2} = 2^{n-1} - 1$

Do đó số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là : $u_n = 2^{n-1}$.

Bài 32. Gọi 3 số cần tìm là : a , b , c theo giả thiết ta có :

$$\begin{cases} b^2 = a.c \\ a + c = 2(b+2) \\ a.(c+9) = (b+2)^2 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: 4, 8, 16 hoặc $\dfrac{4}{25}, -\dfrac{16}{25}, \dfrac{64}{25}$.

Bài 33. Gọi 4 số cần tìm là: a, b, c, d theo giả thiết ta có: $\begin{cases} b^2 = a.c \\ b + d = 2c \\ a + d = 32 \\ b + c = 24 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được : 32 , 16 , 8 , 0 hoặc 2, 6, 18, 30 .

Bài 34. Theo giả thiết , ta có: $\begin{cases} x + 3y + x + 5y = 2(5x - 2y) \\ (x-1)^2(y+2)^2 = (xy-3)^2 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được : $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$

Bài 35. Chứng minh bằng quy nạp ta được :

a) $u_n = 2, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ nên (u_n) sau vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân .

b) $u_n = 4, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ nên (u_n) sau vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân .

Bài 36. Tính tổng :

a) $A = 7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777\ldots7}_{(n \text{ số } 7)}$

$$= \frac{7}{9}\left(9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{(n \text{ số } 9)}\right) = \frac{7}{9}\left(10 - 1 + 10^2 - 1 + \cdots + 10^n - 1\right)$$

$$= \frac{7}{9}\left(10 + 10^2 + \cdots + 10^n - n\right) = \frac{7}{9}\cdot\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right].$$

b) $B = 15 + 155 + 1555 + \ldots + 1\underbrace{555\cdots5}_{(n \text{ số } 5)}$

$$= 10 + 10^2 + \cdots + 10^n + 5 + 55 + 555 + \cdots + \underbrace{555\cdots5}_{(n \text{ số } 5)}$$

$$= 10 + 10^2 + \cdots + 10^n + \frac{5}{9}\left(9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{(n \text{ số } 9)}\right)$$

$$= 10 + 10^2 + \cdots + 10^n + \frac{5}{9}\left(10 + 10^2 + \cdots + 10^n - n\right)$$

$$= \frac{14}{9}\left(10 + 10^2 + \cdots + 10^n\right) - \frac{5}{9}n = \frac{14}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right] - \frac{5}{9}n$$

c) $C = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots + \left(x^{2011} + \dfrac{1}{x^{2011}}\right)^2$, $(x \ne 0)$

$$= x^2 + x^4 + \cdots\cdots + x^{2022} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \cdots\cdots + \frac{1}{x^{2022}} + 2022$$

$$= \frac{x^2\left(x^{2022} - 1\right)}{x^2 - 1} + \frac{\dfrac{1}{x^2}\left(1 - \dfrac{1}{x^{2022}}\right)}{\dfrac{x^2 - 1}{x^2}} + 2022 = \frac{9\left(x^{2022} - 1\right)}{x^2 - 1} + \frac{x^{2022} - 1}{\left(x^2 - 1\right).x^{2022}} + 2022$$

$$= \frac{\left(x^{2022} - 1\right)\left(9.x^{2022} + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right).x^{2022}} + 2022.$$

d) $D = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \cdots + 2010.3^{2009}$

$\Rightarrow 3D = 3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \cdots + 2010.3^{2010}$

$\Rightarrow D - 3D = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2009} - 2010.3^{2010}$

$\Rightarrow -2D = \dfrac{3^{2010} - 1}{2} - 2010.3^{2010} \Rightarrow D = \dfrac{1}{4} + \dfrac{4039}{4}.3^{2010}$.

e) $E = 1 + 4.5 + 7.5^2 + \cdots + (3n-2).5^n$

$\Rightarrow 5E = 5 + 4.5^2 + 7.5^3 + \cdots + (3n-5)5^n + (3n-2).5^{n+1}$

$\Rightarrow E - 5E = 1 + 3.5 + 3.5^2 + \cdots + 3.5^n - (3n-2).5^{n+1}$

$\Rightarrow -4E = 1 - (3n-2).5^{n+1} + 3\left(5 + 5^2 + \cdots + 5^n\right) = 1 - (3n-2).5^{n+1} + 3\dfrac{5\left(5^n - 1\right)}{4}$

$\Rightarrow E = \dfrac{1}{4} + \dfrac{(3n-5).5^{n+1}}{4}$.

f) $F = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \cdots + \dfrac{2n-3}{2^n} + \dfrac{2n-1}{2^n}$

$$=1.\frac{1}{2}+3.\frac{1}{2^2}+5.\frac{1}{2^3}+\cdots+(2n-3)\frac{1}{2^{n-1}}+(2n-1)\frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}F=1.\frac{1}{2^2}+3.\frac{1}{2^3}+5.\frac{1}{2^4}+\cdots+(2n-3)\frac{1}{2^n}+(2n-1)\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow F-\frac{1}{2}F=1.\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2^2}+2.\frac{1}{2^3}+\cdots+2.\frac{1}{2^n}-(2n-1)\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-(2n-1)\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)+2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right).$$

$$=\frac{1}{2}-(2n-1)\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)+2\left[\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow F=3-(2n-1)\frac{1}{2^n}-\frac{4}{2^n}=3-(2n+3)\frac{1}{2^n}.$$

g) $G=(2n)^2-(2n-1)^2+(2n-2)^2-(2n-3)^2+\cdots+2^2-1$

$$=(4n-1)+(4n-5)+\cdots+3=\frac{n(4n+2)}{2}=n(2n+1).$$

Chương 4:

GIỚI HẠN

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn 0

1.1. ***Định nghĩa :*** Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn 0, nếu $\forall \varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý luôn luôn $\exists N_0$ sao cho $\forall n > N_0$ ta đều có : $|u_n| < \varepsilon$.

Kí hiệu : $\lim(u_n)=0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$.

1.2. ***Nhận xét :***

- $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim|u_n| = 0$.
- Nếu (u_n) có $u_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $\lim u_n = \lim 0 = 0$.
- Cho dãy số (u_n), nếu $|u_n| \le v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- ***Các dãy số có giới hạn 0:***
    - ○ $\lim\frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{C}{n}=0$, (C là hằng số).
    - ○ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0$, $(k\in\mathbb{Z}^+)$; $\lim\frac{1}{\sqrt[k]{n}}$, $(k\ge 2, k\in\mathbb{Z})$.
    - ○ $\lim q^n = 0$, $(|q|<1)$.

2. Dãy số có giới hạn hữu hạn

2.1. ***Định nghĩa :*** Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn hữu hạn là số thực L, nếu $\lim(u_n - L) = 0$.

Kí hiệu : $\lim(u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$.

Tức là : $\lim u_n = L \Leftrightarrow \lim(u_n - L) = 0$.

2.2. ***Các định lí cơ bản về giới hạn của dãy số :***

- ***Định lí 1:*** Nếu C là hằng số thì $\lim C = C$.
- ***Định lí 2:*** Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó :
    - ○ $\lim|u_n| = |L|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.
    - ○ Nếu $u_n \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $L \ge 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.
- ***Định lí 3:*** Nếu $\lim u_n = L$ và $\lim v_n = M$; C là hằng số . Thì :
    - ○ $\lim(u_n \pm v_n) = \lim u_n \pm \lim v_n = L \pm M$;
    - ○ $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n = L \cdot M$;
    - ○ $\lim(C.u_n) = C.\lim u_n = C \cdot L$;
    - ○ $\lim\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{L}{M}$ nếu $\lim v_n = M \ne 0$.

- ***Định lí 4:*** Cho ba dãy số (u_n); (v_n) và (w_n). Nếu $v_n \le u_n \le w_n, \forall n$ và $\lim v_n = \lim w_n = L, (L \in \mathbb{R})$ thì $\lim u_n = L$.
- ***Định lí 5:*** Nếu một dãy số tăng và bị chặn trên thì nó có giới hạn.
  Nếu một dãy số giảm và bị chặn dưới thì nó có giới hạn.

2.3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 + \cdots\cdots = \frac{u_1}{1-q} \text{ nếu } (|q| < 1).$$

3. Dãy số có giới hạn vô cực

3.1. Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $+\infty$ nếu $\forall M > 0$ lớn tùy ý luôn luôn $\exists N_0$ sao cho $\forall n > N_0$ ta đều có: $u_n > M$.
- Kí hiệu : $\lim(u_n) = +\infty$ hoặc $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$.
- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ nếu $\forall M < 0$ nhỏ tùy ý luôn luôn $\exists N_0$ sao cho $\forall n > N_0$ ta đều có : $u_n < M$.

  Kí hiệu : $\lim(u_n) = -\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$.

3.2. Các quy tắc tính giới hạn vô cực:

- Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$;
- Nếu $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$;
- $\lim\sqrt{n} = +\infty$; $\lim n^k = +\infty\ (k \in \mathbb{Z}^+)$; $\lim q^n = +\infty\ (q > 1)$.
- Nếu $\lim u_n = +\infty$; $\lim v_n = L \ne 0$ thì
  $$\lim(u_n \cdot v_n) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L > 0 \\ -\infty & \text{nếu } L < 0 \end{cases};$$
- Nếu $\lim u_n = -\infty$; $\lim v_n = L \ne 0$ thì
  $$\lim(u_n \cdot v_n) = \begin{cases} -\infty & \text{nếu } L > 0 \\ +\infty & \text{nếu } L < 0 \end{cases};$$
- Nếu $\lim u_n = L \ne 0$, $\lim v_n = 0$ thì
  $$\lim\frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L.v_n > 0 \\ -\infty & \text{nếu } L.v_n < 0 \end{cases}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

1. Tìm giới hạn của dãy số theo định nghĩa

1.1. Phương pháp : Để chứng minh dãy số có giới 0 ta có thể thực hiện theo 2 cách sau:

- ***Cách 1 :*** Áp dụng trực tiếp định nghĩa.
- ***Cách 2 :*** Áp dụng định lí : Cho dãy số (u_n), nếu $|u_n| \le v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

- Để tìm giới hạn của dãy số theo định nghĩa ta dựa vào định nghĩa:
  $$\lim u_n = L \Leftrightarrow \lim(u_n - L) = 0.$$

1.2. Các ví dụ minh họa :

Ví dụ 1. Chứng minh các dãy số (u_n) có giới hạn 0 :

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+2}$; b) $u_n = \frac{n\sin 2n}{n^3+2}$;

c) $u_n = \frac{3^n\sin 2n + 4^n}{2^n + 4.5^n}$; d) $u_n = \sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}$.

Lời giải

a) Xét dãy số : $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+2}$

Cách 1: Cho $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý $\Rightarrow |u_n| = \frac{1}{3n+2} < \frac{1}{3n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{3\varepsilon}$. Do đó nếu chọn $N_0 = \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]$ thì $\forall n > N_0$ ta đều có $|u_n| < \varepsilon$, tức là $\lim\frac{(-1)^n}{3n+2} = 0$.

Cách 2 : Ta có : $|u_n| = \frac{1}{3n+2} < \frac{1}{3n} < \frac{1}{n} = v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

mặt khác : $\lim v_n = \lim\frac{1}{n} = 0$ nên $\lim\frac{(-1)^n}{3n+2} = 0$.

b) Xét dãy số : $u_n = \frac{n\sin 2n}{n^3+2}$

Ta có : $|u_n| = \frac{n|\sin 2n|}{n^3+2} \le \frac{n}{n^3+2} < \frac{n}{n^3} \le \frac{1}{n^2} = v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

mặt khác : $\lim v_n = \lim\frac{1}{n^2} = 0$ nên $\lim\frac{n\sin 2n}{n^3+2} = 0$.

c) Xét dãy số : $u_n = \frac{3^n\sin 2n + 4^n}{2^n + 4.5^n}$

Ta có : $|u_n| = \left|\frac{3^n\sin 2n + 4^n}{2^n + 4.5^n}\right| \le \frac{3^n|\sin 2n| + 4^n}{2^n + 4.5^n} \le \frac{3^n + 4^n}{2^n + 4.5^n} < \frac{2.4^n}{2.5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n$, $\forall n$

mặt khác : $\lim\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ nên $\lim\frac{3^n\sin 2n + 4^n}{2^n + 4.5^n} = 0$.

d) Xét dãy số : $u_n = \sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}$

$$= \frac{n^3 + 2 - (n^3+1)}{\sqrt{n^3+2} + \sqrt{n^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^3+2} + \sqrt{n^3+1}}$$

Ta có : $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n^3+2} + \sqrt{n^3+1}} < \frac{2}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} = v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, mặt khác : $\lim\frac{1}{n}=0$ nên $\lim\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3+1}\right)=0$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(\frac{-n^3}{n^3+1}\right)$; b) $\lim\left(\frac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right)$; c) $\lim\left(\frac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}\right)$.

Lời giải

a) Ta có : $\lim\left(\frac{-n^3}{n^3+1}-(-1)\right)=\lim\frac{1}{n^3+1}$

Xét dãy $u_n=\frac{1}{n^3+1}\Rightarrow|u_n|=\frac{1}{n^3+1}<\frac{1}{n^3}=v_n$, $\forall n$ và $\lim v_n=\lim\frac{1}{n^3}=0$ nên $\lim\frac{1}{n^3+1}=0$.

Do đó $\lim\left(\frac{-n^3}{n^3+1}\right)=-1$;

b) Ta có : $\lim\left(\frac{n^2+3n+2}{2n^2+n}-\frac{1}{2}\right)=\lim\frac{5n+4}{2(2n^2+n)}$

Xét dãy $u_n=\frac{5n+4}{2(2n^2+n)}\Rightarrow|u_n|=\frac{5n+4}{2(2n^2+n)}<\frac{5n+5}{2n(n+1)}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{n}=v_n$, $\forall n$ và $\lim v_n=\frac{5}{2}\lim\frac{1}{n}=0$ nên $\lim\frac{5n+4}{2(2n^2+n)}=0$.

Do đó $\lim\left(\frac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$.

c) Ta có : $\lim\left(\frac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}-3\right)=\lim\left(\frac{-\sin 3n}{3^n}\right)$.

Xét dãy :

$u_n=\frac{-\sin 3n}{3^n}\Rightarrow|u_n|=\frac{|\sin 3n|}{3^n}\le\frac{1}{3^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n=v_n$, $\forall n$ và $\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$,

nên $\lim\left(\frac{-\sin 3n}{3^n}\right)=0$. Do đó $\lim\left(\frac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}\right)=3$.

2. Tìm giới hạn hữu hạn của dãy số theo định lí và công thức

2.1. *Phương pháp :*

- Dựa vào các định lí cơ bản về giới hạn hữu hạn của dãy số và một số công thức về giới hạn của một số dãy số cơ bản, ta sẽ tìm được hầu hết các giới hạn của các dãy số thông thường.
- Phương pháp tìm giới hạn của các dãy số thường gặp:

○***Dạng 1:*** *Nếu dãy số* (u_n) *có* $u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}$ *(trong đó* $P(n),Q(n)$ *là các đa thức của* n*), thì chia tử và mẫu cho* n^k *với* n^k *là lũy thừa có số mũ cao nhất của* $P(n)$ *và* $Q(n)$ *sau đó áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn.*

○***Dạng 2:*** *Nếu dãy số* (u_n) *có* u_n *là biểu thức chứa* n *dưới dấu căn , thì đưa* n^k *ra ngoài dấu căn (với* k *là số mũ cao nhất của* n *trong dấu căn) rồi áp dụng các định lí, nếu gặp dạng (vô định)* $n^k\cdot u_n$ *với* $\lim u_n=0$, *thì phải nhân và chia với biểu thức liên hợp của biểu thức chứa căn tiến về* 0.
Cần chú ý các hằng đẳng thức:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a\pm b$$

○***Dạng 3:*** *Nếu dãy số* (u_n) *có* u_n *là một phân thức mà tử và mẫu là các biểu thức của các lũy thừa có dạng* $a^n, b^n,\cdots$ $(n\in\mathbb{N})$ *trong đó* $a, b,\cdots$ *là các hằng số , thì chia cả tử và mẫu cho lũy thừa có cơ số có trị tuyệt đối lớn nhất trong các lũy thừa ở tử và mẫu , rồi áp dụng các định lí.*

○***Dạng 4:*** *Nếu dãy số* (u_n) *trong đó* u_n *là một tổng hoặc một tích của* n *số hạng (hoặc* n *thừa số), thì phải rút gọn* u_n *rồi tìm* $\lim u_n$ *theo định lí, hoặc dùng nguyên lí kẹp để suy ra* $\lim u_n$.

○***Dạng 5:*** *Nếu dãy số* (u_n) *trong đó* u_n *được cho bởi một hệ thức truy hồi, thì ta tìm công thức tổng quát của* u_n *rồi tìm* $\lim u_n$ *theo định lí, hoặc chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn sau đó dựa vào hệ thức truy hồi để suy ra* $\lim u_n$.

2.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}$; b) $\lim(2n+1)^2\left(\frac{3}{n^2+2n}-\frac{1}{n^2+3n-1}\right)$.

Lời giải

a) $\lim\frac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}=\lim\frac{-4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$

Do : + $\lim\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\lim 2+\lim\frac{1}{n}+\lim\frac{1}{n^2}=2+0+0=2\neq 0$.

+ $\lim\left(-4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)=-4+0+0=-4$

Nên $\lim\frac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}=\frac{-4}{2}=-2$.

b) $\lim (2n+1)^2\left(\frac{3}{n^2+2n}-\frac{1}{n^2+3n-1}\right)$

$$=\lim\frac{(2n+1)^2(2n^2+7n-3)}{(n^2+2n)(n^2+3n-1)}=\lim\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2\left(2+\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}$$

Do : + $\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=(1+0)(1+0-0)=1\neq 0$.

+ $\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)^2\left(2+\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=(2+0)^2(2+0-0)=4.2=8$

Nên $\lim(2n+1)^2\left(\frac{3}{n^2+2n}-\frac{1}{n^2+3n-1}\right)=\frac{8}{1}=8$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\frac{\sqrt{9n^2+2n}-3n}{4n+3}$; b) $\lim\frac{3\sqrt[4]{n^5}+4n-2}{2\sqrt[4]{n^5}-3n}$.

Lời giải

a) $\lim\frac{\sqrt{9n^2+2n}-3n}{4n+3}$

$$=\lim\frac{n\sqrt{9+\frac{2}{n}}-3n}{4n+3}=\lim\frac{\sqrt{9+\frac{2}{n}}-3}{4+\frac{3}{n}}=\frac{\sqrt{9+0}-3}{4+0}=\frac{0}{4}=0.$$

b) $$\lim\frac{3\sqrt[4]{n^5}+4n-2}{2\sqrt[4]{n^5}-3n}=\lim\frac{3+\frac{4}{\sqrt[4]{n}}-\frac{2}{\sqrt[4]{n^5}}}{2-\frac{3}{\sqrt[4]{n}}}=\frac{3+0-0}{2-0}=\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(\sqrt{4n^2+2n}-2n\right)$; b) $\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)$.

Lời giải

a) $$\lim\left(\sqrt{4n^2+2n}-2n\right)=\lim\frac{4n^2+2n-4n^2}{\sqrt{4n^2+2n}+2n}=\lim\frac{2n}{2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1\right)}$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

b) $$\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)=\lim\frac{2n-n^3+(n-1)^3}{\left(\sqrt[3]{2n-n^3}\right)^2-(n-1)\sqrt[3]{2n-n^3}+(n-1)^2}$$

$$=\lim\frac{-3n^2+5n-1}{\left(\sqrt[3]{2n-n^3}\right)^2-(n-1)\sqrt[3]{2n-n^3}+(n-1)^2}$$

$$=\lim\frac{-3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{n^2}-1}\right)^2-\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt[3]{\frac{2}{n^2}-1}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{-3+0-0}{(-1)^2-1.(-1)+1^2}=\frac{-3}{3}=-1.$$

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$; b) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)$.

Lời giải

a) $$\lim\frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}=\lim\frac{(n^6+1-n^6)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)}{(n^4+1-n^4)\left[n^4-n^2\cdot\sqrt[3]{1-n^6}+\left(\sqrt[3]{1-n^6}\right)^2\right]}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{n^4+1}+n^2}{n^4-n^2\cdot\sqrt[3]{1-n^6}+\left(\sqrt[3]{1-n^6}\right)^2}=\lim\frac{\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1\right)}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}-1}+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}-1}\right)^2}$$

$$=\frac{0.\left(\sqrt{1+0}+1\right)}{1+1+1}=\frac{0}{3}=0.$$

b) $$\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)=\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n+n-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)$$

$$=\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)+\lim\left(n-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)$$

$$=\lim\frac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}+\lim\frac{n^3-(n^2+n^3)}{n^2+n.\sqrt[3]{n^2+n^3}+\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)^2}$$

$$=\lim\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}+\lim\frac{-n^2}{n^2+n.\sqrt[3]{n^2+n^3}+\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)^2}$$

$$=\lim\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}+\lim\frac{-1}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{n}+1}+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}+1}\right)^2}=\frac{2}{1+1}+\frac{-1}{1+1+1}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Ví dụ 5. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\dfrac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}$; b) $\lim\dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}$.

Lời giải

a) $\lim\dfrac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-2}{7.\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+3}=\dfrac{0-2}{7.0+3}=-\dfrac{2}{3}$.

b) $\lim\dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}=\lim\dfrac{2^{n+1}-1}{\dfrac{3^{n+1}-1}{2}}=\lim 2.\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}=0$.

Ví dụ 6. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

b) $\lim\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Lời giải

a) Do $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2k+1-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

$$\Rightarrow\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$$

$$=\lim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

b) Ta có : $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(n-1)^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$$

$$\Rightarrow\lim\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\frac{n+1}{2n}=\lim\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 7. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$;

b) $\lim\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$.

Lời giải

a) Ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2}}\geq\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{n}{\sqrt{4n^2}}\geq\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\geq\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Mà $\lim\dfrac{n}{\sqrt{4n^2}}=\lim\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt{4+0}}=\dfrac{1}{2}$.

Nên : $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)=\dfrac{1}{2}$.

b) Ta có : $u_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}\Rightarrow u_n^2=\dfrac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot\cdots\cdot(2n-1)^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot\cdots\cdot(2n)^2}$

$$=\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n+1}$$

Do: $\dfrac{1.3}{2^2}\cdot\dfrac{3.5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}<\dfrac{2^2}{2^2}\cdot\dfrac{4^2}{4^2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(2n)^2}{(2n)^2}=1$

Vậy ta có : $0<u_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Mà $\lim\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0=\lim 0\Rightarrow\lim\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=0$.

Ví dụ 8. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{2^n}\end{cases},\ (n\geq1)$

a) Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n$. Tính $v_1+v_2+\cdots+v_n$ theo n ;

b) Tính u_n theo n ;

c) Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

a) $v_n=u_{n+1}-u_n=u_n+\dfrac{1}{2^n}-u_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Dễ thấy (v_n) là một cấp số nhân có : $v_1=\frac{1}{2}$; $q=\frac{1}{2}$, nên :

$$S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

b) Ta thấy : $u_n=u_n-u_{n-1}+u_{n-1}-u_{n-2}+\cdots+u_2-u_1+u_1$

$$=v_{n-1}+v_{n-2}+\cdots+v_1+u_1=S_{n-1}+u_1=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},(n\ge 2)$$

c) Từ đó : $\lim u_n=\lim\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=2-0=2$.

Ví dụ 9. Cho dãy số (u_n) biết : $\begin{cases}u_1=\sqrt{6}\\ u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\ ,\ (n\ge 1)\end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

Ta có : $u_{n+1}^2-u_n^2=6+u_n-u_n^2=(u_n+2)(3-u_n)$

Mặt khác : $0<u_n<3$, $\forall n$ (ta có thể chứng minh bằng quy nạp)

Do đó : $u_{n+1}^2-u_n^2>0\Leftrightarrow 0<u_n<u_{n+1}$, $\forall n$. Vậy (u_n) là dãy tăng .

(u_n) là dãy tăng và bị chặn nên nó có giới hạn hữu hạn .

Giả sử $\lim u_n=x\Rightarrow \lim u_{n+1}=x$ và do $0<u_n<3$, $\forall n\Rightarrow \lim u_n=x\ge 0$,

mà $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\Rightarrow \lim u_{n+1}=\sqrt{6+\lim u_n}$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{6+x}\Leftrightarrow x^2-x-6=0\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-2\end{array}\right.\Rightarrow x=3\ ,\ (\text{do } x\ge 0)$$

Vậy : $\lim u_n=3$.

3. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn

3.1. Phương pháp :

- Dựa theo công thức:

$$S=u_1+u_1q+u_1q^2+u_1q^3+\cdots\cdots=\frac{u_1}{1-q}\ \text{ nếu }\ (|q|<1) .$$

- Để biểu diễn một số thập phân vô hạn tuần hoàn thành phân số , ta biểu diễn số đó thành tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và suy ra kết quả .

3.2. Các ví dụ minh họa :

Ví dụ 1. Tính các tổng sau :

a) $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$; b) $S=16-8+4-2+\cdots\cdots$

Lời giải

a) Xét dãy số : $(u_n):\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\cdots,\frac{1}{3^n},\cdots\cdots$ là một cấp số nhân có $u_1=\frac{1}{3}$, $q=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2} .$$

b) Xét dãy số : $(u_n):16,-8,4,-2,\cdots$ là một cấp số nhân có $u_1=16$, $q=-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow S=16-8+4-2+\cdots\cdots=\frac{16}{1+\frac{1}{2}}=\frac{32}{3} .$$

Ví dụ 2. Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a) $a=0,353535\cdots$ b) $b=5,231231\cdots$.

Lời giải

a) $a=0,353535\cdots=0,35+0,0035+\cdots$

$$=\frac{35}{10^2}+\frac{35}{10^4}+\cdots=\frac{\frac{35}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{35}{99} .$$

b) $b=5,231231\cdots=5+0,231+0,000231+\cdots$

$$=5+\frac{231}{10^3}+\frac{231}{10^6}+\cdots=5+\frac{\frac{231}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}}=5+\frac{231}{999}=\frac{1742}{333} .$$

4. Giới hạn vô cực của dãy số

4.1. Phương pháp :

- Dựa theo các quy tắc để tìm giới hạn vô cực của các dãy số :
    - ○ Nếu $\lim u_n=+\infty$; $\lim v_n=L\ne 0$ thì

$$\lim(u_n\cdot v_n)=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } L>0\\ -\infty & \text{nếu } L<0\end{cases} ;$$

    - ○ Nếu $\lim u_n=-\infty$; $\lim v_n=L\ne 0$ thì

$$\lim(u_n\cdot v_n)=\begin{cases}-\infty & \text{nếu } L>0\\ +\infty & \text{nếu } L<0\end{cases} ;$$

    - ○ Nếu $\lim u_n=L\ne 0$, $\lim v_n=0$ thì

$$\lim\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } L.v_n>0\\ -\infty & \text{nếu } L.v_n<0\end{cases} ;$$

- ***Chú ý :***
    - ○ $\lim\sqrt[k]{n}=+\infty$, $(k\ge 2,k\in\mathbb{Z})$;
    - ○ $\lim n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$;
    - ○ $\lim q^n=+\infty\ (q>1)$.

4.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim \dfrac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}$; b) $\lim \dfrac{-\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$.

Lời giải

a) $\lim \dfrac{n^5+n^4-n^3-2n^2}{4n^3+6n^2+9} = \lim \dfrac{n^5\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(4+\dfrac{6}{n}+\dfrac{9}{n^3}\right)} = \lim n^2 \cdot \left(\dfrac{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}{4+\dfrac{6}{n}+\dfrac{9}{n^3}}\right)$

Mà $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}{4+\dfrac{6}{n}+\dfrac{9}{n^3}} = \dfrac{1}{4} > 0$.

Nên $\lim \dfrac{n^5+n^4-n^3-2n^2}{4n^3+6n^2+9} = +\infty$.

b) $\lim \dfrac{-\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12} = \lim \dfrac{-n^2\sqrt{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{n^6}}}{n\left(1+\dfrac{12}{n}\right)}$

$= \lim(-n) \cdot \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{n^6}}}{1+\dfrac{12}{n}}$.

Mà $\lim(-n) = -\infty$ và $\lim \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{n^6}}}{1+\dfrac{12}{n}} = \dfrac{1}{1} = 1 > 0$.

Nên $\lim \dfrac{-\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12} = -\infty$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)$; b) $\lim \dfrac{\left(n^2+1\right)(2n+3)}{\sqrt{n^4-n^2+1}}$.

Lời giải

a) $\lim\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right) = \lim \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{2+\dfrac{3}{n}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right)$

Do $\lim\left(\sqrt{n}\right) = +\infty$ và $\lim\left(\sqrt{2+\dfrac{3}{n}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right) = \sqrt{2}-1 > 0$.

Nên $\lim\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right) = +\infty$.

b) $\lim \dfrac{\left(n^2+1\right)(2n+3)}{\sqrt{n^4-n^2+1}} = \lim \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}}$

Do $\lim\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(2+\dfrac{3}{n}\right) = 1 \cdot 2 = 2 > 0$, $\lim\sqrt{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}} = 0$

và $\sqrt{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}} > 0$, nên $\lim \dfrac{\left(n^2+1\right)(2n+3)}{\sqrt{n^4-n^2+1}} = +\infty$.

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(5^n-3^{n+1}\right)$; b) $\lim \dfrac{(-3)^n-6^n}{(-3)^{n+1}+5^{n+1}}$;

c) $\lim\left(\sqrt{n^4+1}+n-1\right)$; d) $\lim\left(\dfrac{1}{3}n^3+2\sin 2n+3\right)$.

Lời giải

a) $\lim\left(5^n-3^{n+1}\right) = \lim 5^n \cdot \left[1-3.\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right]$

Do $\lim 5^n = +\infty$, $\lim\left[1-3.\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right] = 1-3.0 = 1 > 0$

Nên $\lim\left(5^n-3^{n+1}\right) = +\infty$.

b) $\lim \dfrac{(-3)^n-6^n}{(-3)^{n+1}+5^{n+1}} = \lim \dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}{3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+5\left(\dfrac{5}{6}\right)^n}$

Do $\lim\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1\right] = -1 < 0$, $\lim\left[3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+5\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right] = 0$

và $3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+5\left(\dfrac{5}{6}\right)^n > 0$, nên $\lim \dfrac{(-3)^n+6^n}{(-3)^{n+1}+5^{n+1}} = -\infty$.

c) $\lim\left(\sqrt{n^4+1}+n-1\right) = \lim n^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)$

Do $\lim n^2 = +\infty$, $\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right) = 1 > 0$

Nên $\lim\left(\sqrt{n^4+1}+n-1\right) = +\infty$.

d) $\lim\left(\frac{1}{3}n^3+2\sin 2n+3\right)=\lim n^3\left(\frac{1}{3}+\frac{2\sin 2n}{n^3}+\frac{3}{n^3}\right)$

Mà $\lim n^3=+\infty$ và $\lim\left(\frac{1}{3}+\frac{2\sin 2n}{n^3}+\frac{3}{n^3}\right)=\frac{1}{3}+0+0=\frac{1}{3}>0$

$$\left(\text{do }\left|\frac{2\sin 2n}{n^3}\right|\le\frac{2}{n^3},\forall n\ ;\ \lim\frac{2}{n^3}=0\Rightarrow\lim\frac{2\sin 2n}{n^3}=0\right)$$

Nên $\lim\left(\frac{1}{3}n^3+2\sin 2n+3\right)=+\infty$.

➢ ***Khi tính các giới hạn dạng phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây :***

- Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.
- Nếu bậc của tử bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của luỹ thừa cao nhất của tử và của mẫu.
- Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là $+\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là $-\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm các giới hạn sau theo định nghĩa :

a) $\lim\frac{\sin n}{n}$; b) $\lim\frac{3\sin n-4\cos n}{2n^2+1}$;

c) $\lim\left(2+\frac{(-1)^n}{n+2}\right)$; d) $\lim\frac{(-1)^n\sin(3n+n^2)}{3n-1}$;

e) $\lim\left(\frac{\sin 3n}{4n}-1\right)$; f) $\lim\frac{3\sin^2(n^3+2)+n^2}{2-3n^2}$.

Bài 2. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\frac{2n^3-4n^2+3n+3}{n^3-5n+7}$; b) $\lim\frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$;

c) $\lim\frac{(2n-3)^2(4n+7)^2}{(3n-4)^2(5n^2+1)}$; d) $\lim\frac{(n-1)^2(7n+2)^2}{(2n+1)^4}$;

e) $\lim\left(\frac{2n^3}{2n^2+3}+\frac{1-5n^2}{5n+1}\right)$; f) $\lim\frac{-3n^5+7n^3-11}{n^5+n^4-3n}$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\frac{n^2+\sqrt[3]{1+n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$; b) $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$;

c) $\lim\frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n+2}$; d) $\lim\frac{\sqrt{2n^4+3n-2}}{2n^2-n+3}$;

e) $\lim\frac{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)^5+\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^5}{n^5}$; f) $\lim\frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}$.

Bài 4. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{3n+21}\right)$; b) $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right)$;

c) $\lim\frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}$; d) $\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)$;

e) $\lim\left(n+\sqrt[3]{1-n^3}\right)$; f) $\lim(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-4)$;

g) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)$; h) $\lim\left(\sqrt{9n^2+2n}-\sqrt[3]{8n^3+6n+1}-n\right)$.

Bài 5. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\frac{1+3^n}{4+3^n}$; b) $\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$;

c) $\lim\frac{1+2.3^n-7^n}{5^n+2.7^n}$; d) $\lim\frac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}$;

e) $\lim\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$; f) $\lim\frac{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+...+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$.

Bài 6. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\frac{1+2+...+n}{n^2}$; b) $\lim\frac{n.\sqrt{1+3+\cdots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$;

c) $\lim\frac{1^2+3^2+...+(2n-1)^2}{n^3}$; d) $\lim\left[\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+...+\frac{1}{2n(2n+2)}\right]$;

e) Cho $u_n=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

f) $\lim\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$; g) $\lim\frac{3\sin n+4\cos n}{2n+1}$.

Bài 7. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=-7\\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-\frac{20}{3},\ (n\ge1)\end{cases}$

a) Chứng minh rằng: $v_n=u_n+10$ là cấp số nhân .

b) Tính v_n theo n. Từ đó tìm $\lim u_n$.

Bài 8. Tìm $\lim u_n$ biết :

a) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$; b) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 4}{4} \end{cases}, (n \geq 1)$

Bài 9. Tính các tổng sau :

a) $S = 5 - \sqrt{5} + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{5} + \cdots$; b) $S = \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 + \cdots$

Bài 10. Tìm công bội của một cấp số nhân lùi vô hạn . Biết tổng của nó là 18 và $u_3 = \dfrac{4}{3}$.

Bài 11. Cho cấp số nhân (u_n) lùi vô hạn có tổng là 12 , hiệu số hạng đầu và số hạng thứ hai là $\dfrac{3}{4}$ và số hạng đầu tiên là số dương . Tìm số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân đó .

Bài 12. Biểu diễn dưới dạng phân số , các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau :

a) $x = 0,467467467\cdots$ b) $y = -3,123412341234\cdots$

Bài 13. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim \dfrac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$; b) $\lim(3n^3 - 7n + 11)$;

c) $\lim \sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$; d) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$;

e) $\lim\left(\sqrt{n^2 - n + 3} + n\right)$; f) $\lim \dfrac{4^{n+1} + 8^{n+2}}{5^n + 6^n}$;

g) $\lim \dfrac{4^n - 7^n}{2^n + 3.5^n}$; h) $\lim \dfrac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n}$ $(0 < a, b \neq 1)$;

i) $\lim n\left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - 3n\right)$; k) $\lim n\left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}\right)$;

l) $\lim(n^2 - 2\cos 3n + 2)$; m) $\lim n\left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt[3]{n^2 + n^3}\right)$

o) $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^4 + 1}}{n} - \dfrac{\sqrt{4n^6 + 2}}{n}\right)$; p) $\lim n^2\left[\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

Bài 14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - 1 \end{cases}$

a) Chứng minh $-1 < u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và (u_n) là dãy số giảm .

b) Tìm $\lim u_n$.

* * *

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

1.1. ***Giới hạn hữu hạn:*** Cho $x_0 \in (a\,;b)$, $f(x)$ là hàm số xác định trên tập hợp: $D = (a\,;b)\backslash\{x_0\}$, nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n \in (a\,;b)\backslash\{x_0\}$ sao cho $\lim x_n = x_0$, ta đều có: $\lim f(x_n) = L$, thì lúc đó ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi dần đến x_0 và được kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

- ***Chú ý :***

$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$, *(C: hằng số).*

1.2. ***Giới hạn vô cực:*** Cho $x_0 \in (a\,;b)$, $f(x)$ là hàm số xác định trên tập hợp: $D = (a\,;b)\backslash\{x_0\}$,

- Nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n \in (a\,;b)\backslash\{x_0\}$ sao cho $\lim x_n = x_0$, ta đều có : $\lim f(x_n) = +\infty$ thì ta nói $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
- Nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n \in (a\,;b)\backslash\{x_0\}$ sao cho $\lim x_n = x_0$, ta đều có : $\lim f(x_n) = -\infty$ thì ta nói $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

2.1. ***Các định nghĩa :***

- Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên $(a\,;+\infty)$, nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n \in (a\,;+\infty)$ và $\lim x_n = +\infty$, ta đều có: $\lim f(x_n) = L$ thì ta nói $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- Các giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự .

2.2. ***Các giới hạn đặc biệt :***

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \text{ nếu k chẵn} \\ -\infty \text{ nếu k lẻ} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} C = C$, *(C là hằng số)* ; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{C}{x^k} = 0$.

3. Một số định lí về giới hạn

3.1. ***Định lí 1:***

Nếu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} f(x) = L$ và $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} g(x) = M$ thì :

- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} [f(x) + g(x)] = L + M$

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$;

  $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left[C.f(x)\right]=C\cdot L$, *(C là hằng số)*

  $\lim\limits_{x\to x_0}C.x^k=C\cdot x_0^k$, *(C là hằng số* , $k\in\mathbb{Z}^+$ *)*.
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (nếu $M\neq 0$) .

3.2. Định lí 2 : Giả sử $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}f(x)=L$

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}|f(x)|=|L|$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{L}$;
- Nếu $f(x)\geq 0,\forall x\in(x_0-\varepsilon\,;\,x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\},(\varepsilon>0)$ và $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$

thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

3.3. Định lí 3 : Cho 3 hàm số $f(x),g(x)$, $h(x)$ xác định trên tập :

$$D=(x_0-\varepsilon\,;\,x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\},(\varepsilon>0)$$

Nếu $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$, $\forall x\in D$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=L$ thì :

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$.

Từ đó ta chứng minh được :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1\ \text{khi}\ \lim_{x\to x_0}u(x)=0\ .$$

4. Giới hạn một bên

4.1. Các định nghĩa:

- ***Giới hạn bên phải :*** Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(x_0\,;\,b)$, nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n>x_0$ và $\lim x_n=x_0$, ta đều có: $\lim f(x_n)=L$, thì lúc đó ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn bên phải là số thực L khi dần đến x_0 và được kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$.
- ***Giới hạn bên trái :*** Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a\,;\,x_0)$, nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n<x_0$ và $\lim x_n=x_0$, ta đều có: $\lim f(x_n)=L$, thì lúc đó ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn bên trái là số thực L khi dần đến x_0 và được kí hiệu : $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L$.

- ***Giới hạn vô cực:*** Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(x_0\,;\,b)$, nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n>x_0$ và $\lim x_n=x_0$, ta đều có: $\lim f(x_n)=+\infty$, thì lúc đó ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn bên phải là vô cực khi dần đến x_0 và được kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$.

  Các định nghĩa : $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$ được phát biểu tương tự trên .

4.2. Định lí :

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=L$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty\ .$$

5. Các quy tắc tìm giới hạn vô cực:

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$;
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$ thì:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}+\infty\ \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ \text{cùng dấu}\\-\infty\ \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ \text{trái dấu}\end{cases};$$

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ thì:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}+\infty\ \text{ nếu }\ L.g(x)>0\\-\infty\ \text{ nếu }\ L.g(x)<0\end{cases}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP :

1. Tìm giới hạn của hàm số

1.1. Phương pháp :

- Dựa theo các định nghĩa về giới hạn của hàm số (giới hạn hữu hạn, giới hạn vô cực , giới hạn tại vô cực …) .
- Dựa vào các định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số, các quy tắc tìm giới hạn vô cực …
- ***Chú ý :***

Để chứng minh một hàm số không có giới hạn khi $x\to x_0$ (hoặc $x\to\pm\infty$), ta chọn hai dãy số (x_n), (x_n') cùng thuộc tập xác định của hàm số sao cho $x_n\neq x_0$, $x_n'\neq x_0$ và $\lim(x_n)=\lim(x_n')=x_0$ rồi chứng minh $\lim f(x_n)\neq\lim f(x_n')$, hoặc chứng minh một trong hai giới hạn trên không tồn tại .

1.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 4. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{9x^2+2}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to2}(x-2)\sin\dfrac{x}{x^2-4}$.

Lời giải

a) Xét hàm số : $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$, với mọi dãy số (x_n) mà $x_n\neq-1,\forall n$

và $\lim x_n=-1$, ta có : $f(x_n)=\dfrac{x_n^2-3x_n-4}{x_n+1}=\dfrac{(x_n+1)(x_n-4)}{x_n+1}=x_n-4$

$\Rightarrow \lim f(x_n)=\lim(x_n-4)=\lim x_n-\lim 4=-1-4=-5$;

nên $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}=-5$.

b) Xét hàm số : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}$, với mọi dãy số (x_n) mà $x_n\neq1,\forall n$ và

$\lim x_n=1$, ta có : $f(x_n)=\dfrac{x_n^2-4}{(x_n-1)^2}$

Do $\lim(x_n^2-4)=1^2-4=-3<0$; $\lim(x_n-1)^2=(1-1)^2=0$, $(x_n-1)^2>0$

$\Rightarrow \lim f(x_n)=-\infty$, nên $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}=-\infty$.

c) Xét hàm số : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{9x^2+2}\right)$, với mọi dãy số (x_n) mà $\lim x_n=-\infty$, ta

có : $f(x_n)=x_n-\sqrt{9x_n^2+2}=x_n-|x_n|\sqrt{9+\dfrac{2}{x_n^2}}=x_n\left(1+\sqrt{9+\dfrac{2}{x_n^2}}\right)$

Do $\lim x_n=-\infty$; $\lim\left(1+\sqrt{9+\dfrac{2}{x_n^2}}\right)=1+3=4>0\Rightarrow \lim f(x_n)=-\infty$,

nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{9x^2+2}\right)=-\infty$.

d) Xét hàm số : $f(x)=(x-2)\sin\dfrac{x}{x^2-4}$,với mọi dãy số (x_n) mà $x_n\neq2,\forall n$

và $\lim x_n=2$, ta có : $f(x_n)=(x_n-2)\sin\dfrac{x_n}{x_n^2-4}$

Do $|f(x_n)|=|x_n-2|\cdot\left|\sin\dfrac{x_n}{x_n^2-4}\right|\leq|x_n-2|$, $\forall n$ và $\lim|x_n-2|=|2-2|=0$

$\Rightarrow \lim f(x_n)=0$, nên $\lim\limits_{x\to2}(x-2)\sin\dfrac{x}{x^2-4}=0$.

Ví dụ 5. Chứng minh các giới hạn sau không tồn tại :

a) $\lim\limits_{x\to-1}\sin\dfrac{3}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos(2x+1)$

Lời giải

a) Xét hàm số: $f(x)=\sin\dfrac{3}{x+1}$

Chọn các dãy số: (x_n) với $x_n=\dfrac{3}{2n\pi}-1$ và (x_n') với $x_n'=\dfrac{6}{(4n+1)\pi}-1$

Ta thấy $\lim x_n=\lim\left(\dfrac{3}{2n\pi}-1\right)=-1$, $\lim x_n'=\lim\left(\dfrac{6}{(4n+1)\pi}-1\right)=-1$

$\Rightarrow f(x_n)=\sin\dfrac{3}{\dfrac{3}{2n\pi}-1+1}=\sin(2n\pi)=0$,

$\Rightarrow \lim f(x_n)=\lim 0=0$

$f(x_n')=\sin\dfrac{3}{\dfrac{6}{4n\pi+\pi}}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1\Rightarrow \lim f(x_n')=1$

Vì $\lim f(x_n)\neq\lim f(x_n')$ nên $\lim\limits_{x\to-1}\sin\dfrac{3}{x+1}$ không tồn tại.

b) Xét hàm số : $f(x)=\cos(2x+1)$. Chọn dãy số: (x_n) với $x_n=\dfrac{1}{2}(-1-n\pi)$

Ta thấy $\lim x_n=\lim\dfrac{1}{2}(-1-n\pi)=-\infty$,

$\Rightarrow f(x_n)=\cos(-n\pi)=\cos n\pi=\left[\begin{array}{ll}1 & \text{khi } n=2k\\ -1 & \text{khi } n=2k+1\end{array}\right.$, $(k\in\mathbb{Z})$

Suy ra, dãy số $(f(x_n))$ không có giới hạn, tức là: $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos(2x+1)$ không tồn tại.

Ví dụ 6. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to-1}(3x^2-2x+1)$; b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^3-3x)(x+1)}{x^2+3}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to-1}(3x^2-2x+1)=3\lim\limits_{x\to-1}x^2-2\lim\limits_{x\to-1}x+\lim\limits_{x\to-1}1=3(-1)^2-2.1+1=2$

b) Do $\lim\limits_{x\to2}(x^2+3)=2^2+3=7\neq0$,

$\lim\limits_{x\to2}(x^3-3x)(x+1)=\lim\limits_{x\to2}(x^3-3x).\lim\limits_{x\to2}(x+1)=(2^3-3.2).(2+1)=6$

Nên $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^3-3x)(x+1)}{x^2+3}=\frac{6}{7}$.

Ví dụ 7. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2}{x^3-x-6}}$; b) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2}{x^3-x-6}}$; do $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2}{x^3-x-6}=\frac{3^2}{3^3-3-6}=\frac{1}{2}>0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2}{x^3-x-6}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}$; do $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}=\frac{7}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}=\sqrt[3]{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt[3]{28}}{2}$.

Ví dụ 8. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}\right|$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left|\frac{x^3-3x+1}{2x^2-x^3}\right|$.

Lời giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2+3x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x+1}{x+2}=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}\right|=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left|\frac{x^3-3x+1}{2x^2-x^3}\right|=\left|\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3-3x+1}{2x^2-x^3}\right|$

$=\left|\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x}-1}\right|=\left|\frac{1-0+0}{0-1}\right|=|-1|=1.$

Ví dụ 9. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\sqrt{\frac{x-1}{4x^3+x^2}}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{9x^2+2x-1}}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\sqrt{\frac{x-1}{4x^3+x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{x^3-x^2}{4x^3+x^2}}$ (do $x\to +\infty \Rightarrow x>0$)

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3-x^2}{4x^3+x^2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{4+\frac{1}{x}}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{9x^2+2x-1}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x-1}{|x|\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{-\sqrt{9-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}=\frac{3}{-3}=-1$.

Ví dụ 10. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-1+3x-2x^2}{\sqrt{x-1}}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{|x-3|}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-1+3x-2x^2}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-(2x-1)(x-1)}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-(2x-1)\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x-1}}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[-(2x-1)\left(\sqrt{x-1}\right)\right]=-(2-1)\sqrt{1-1}=0$.

b) Ta có : $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3}{|x-3|}=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-1)=2$

$\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-4x+3}{|x-3|}=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{(x-1)(x-3)}{-(x-3)}=-\lim\limits_{x\to 3^+}(x-1)=-2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3}{|x-3|}\neq \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-4x+3}{|x-3|}$

Vậy : $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{|x-3|}$ không tồn tại .

Ví dụ 11. Cho hàm số : $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Tìm :

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, (nếu có) .

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$.

c) Ta có: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\dfrac{1}{2}$. Nên $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 12. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1+3x-2x^2}{x-3}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$

Ta có : $\lim\limits_{x\to2^+}(x-15)=2-15=-13<0$, $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0$,

$$x-2>0\ \left(\text{do } x\to2^+\Rightarrow x>2\right)\Rightarrow\lim_{x\to2^+}\frac{x-15}{x-2}=-\infty.$$

b) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1+3x-2x^2}{x-3}$

Ta có : $\lim\limits_{x\to3^-}\left(1+3x-2x^2\right)=1+3.3-18=-8<0$, $\lim\limits_{x\to3^-}(x-3)=0$,

$$x-3<0\ \left(\text{do } x\to3^-\Rightarrow x<3\right)\Rightarrow\lim_{x\to3^-}\frac{1+3x-2x^2}{x-3}=+\infty.$$

Ví dụ 13. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2-3x+1}{\sqrt{x+2}}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-1)(x+3)-x}{4-x+2|x|}$.

Lời giải

a) Ta có : $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\left(x^2-3x+1\right)=11>0$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\sqrt{x+2}=0$,

$$\sqrt{x+2}>0\ \left(\text{do } x\to(-2)^+\Rightarrow x>-2\right)\Rightarrow\lim_{x\to(-2)^+}\frac{x^2-3x+1}{\sqrt{x+2}}=+\infty.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)(x+3)-x}{4-x+2|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)(x+3)-x}{4-x+2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)-\frac{1}{x}}{\frac{4}{x}+1}\right]$$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)-\frac{1}{x}}{\frac{4}{x}+1}\right]=\dfrac{2}{1}=2>0$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)(x+3)-x}{4-x+2|x|}=+\infty.$$

2. Các dạng vô định

2.1. Dạng $\dfrac{0}{0}$ **:** Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}f(x)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}g(x)=0$ thì $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ được gọi là có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Để tính được các giới hạn dạng này ta phải khử dạng vô định, có một số loại thường gặp và cách khử dạng vô định của chúng như sau:

- Nếu biểu thức dưới dấu giới hạn có dạng: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là hai đa thức của x.

  Để khử dạng vô định ta biến đổi: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{(x-x_0)^m\cdot P_1(x)}{(x-x_0)^n\cdot Q_1(x)}$ rồi giản ước các thừa số có dạng $(x-x_0)^k$; $k=\max(m,n)$.

- Nếu biểu thức dưới dấu giới hạn có chứa dấu căn : ta nhân và chia với biểu thức liên hợp của biểu thức chứa căn tiến về 0, rồi làm tương tự như dạng trên ta sẽ khử được dạng vô định .

2.2. Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$ **:** Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}f(x)=\pm\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}g(x)=\pm\infty$

thì $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ được gọi là có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Chia tử và mẫu cho x^k với x^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của tử và mẫu, (hoặc rút x^k làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn hoặc các quy tắc về giới hạn vô cực .

2.3. Dạng $0\times\infty$; $\infty-\infty$ **:** Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}f(x)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}g(x)=\pm\infty$

thì $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}[f(x).g(x)]$ được gọi là có dạng vô định $0\times\infty$.

Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}g(x)=+\infty$.

thì $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}[f(x)-g(x)]$ được gọi là có dạng vô định $\infty-\infty$.

Khi gặp hai dạng này thì ta tìm cách đưa về một trong hai dạng đầu.

2.4. Chú ý :

Để tìm giới hạn của hàm khi $x\to x_0$ (hoặc $x\to\pm\infty$), thì trước hết ta phải xét xem có gặp phải dạng vô định hay không ? Nếu không gặp phải dạng vô định thì ta có ngay kết quả . Nếu gặp phải dạng vô định thì vận dụng các phương pháp nêu trên để khử dạng vô định .

2.5. *Các ví dụ minh họa :*

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+5)(x-2)}{(3x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+5}{3x+1}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}=\dfrac{15}{11}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)\right]=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^n-1)-n(x-1)}{(x-1)^2}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)-n}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{n-1}-1)+(x^{n-2}-1)+\cdots+(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x^{n-2}+x^{n-1}+\cdots+1)+(x^{n-3}+x^{n-4}+\cdots+1)+\cdots+1\right]$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left[(n-1)+(n-2)+\cdots+1\right]=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+1-9}{(x^2-4)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{(x+2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\dfrac{4}{4.6}=\dfrac{1}{6}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+4x-1}{x\left[\left(\sqrt[3]{1+4x}\right)^2+\sqrt[3]{1+4x}+1\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{\left(\sqrt[3]{1+4x}\right)^2+\sqrt[3]{1+4x}+1}=\dfrac{4}{3}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(3x-2)-(4x^2-x-2)}{(x^2-3x+2)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+\sqrt[3]{3x-2}\cdot\sqrt[3]{4x^2-x-2}+\left(\sqrt[3]{4x^2-x-2}\right)^2\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-4x(x-1)}{(x-1)(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+\sqrt[3]{3x-2}\cdot\sqrt[3]{4x^2-x-2}+\left(\sqrt[3]{4x^2-x-2}\right)^2\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-4x}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+\sqrt[3]{3x-2}\cdot\sqrt[3]{4x^2-x-2}+\left(\sqrt[3]{4x^2-x-2}\right)^2\right]}$

$=\dfrac{-4}{-1\cdot(1+1+1)}=\dfrac{4}{3}$.

Ví dụ 5. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x^2+3}-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x^2+3-4)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x^2-1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=\dfrac{4}{-2.3}=-\dfrac{2}{3}$.

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-2+2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}+\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=A+B$$

Ta có : $$A=\lim_{x\to 1}\frac{5-x^3-4}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\left(x^2+x+1\right)}{(x+1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}=\frac{-3}{2.4}=-\frac{3}{8}.$$

$$B=\lim_{x\to 1}\frac{8-\left(x^2+7\right)}{\left(x^2-1\right)\left[4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)}{(x+1)\left[4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\left(\sqrt[3]{x^2+7}\right)^2\right]}=\frac{-2}{2(4+4+4)}=-\frac{1}{12}.$$

Do đó : $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=-\frac{3}{8}-\frac{1}{12}=-\frac{11}{24}.$$

Ví dụ 6. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x+1}{2-6x^2-6x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

Lời giải

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x+1}{2-6x^2-6x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-\frac{6}{x}-6}=\frac{1}{-6}=-\frac{1}{6}.$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{50}}=\frac{2^{20}.3^{30}}{2^{50}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

Ví dụ 7. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$

Lời giải

a) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)|x|\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x^2\left(\frac{1}{x}-5\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x^2\left(\frac{1}{x}-5\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\left(2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{\frac{1}{x}-5}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}.$$

b) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-x}{|x|\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2x}$$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-x}{|x|\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-x}{x\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}-1}{\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2}=\frac{\sqrt{4}-1}{\sqrt{9}+2}=\frac{1}{5}.$$

* $$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-x}{|x|\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-x}{-x\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}-1}{-\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2}=\frac{-\sqrt{4}-1}{-\sqrt{9}+2}=\frac{-3}{-1}=-3.$$

Ví dụ 8. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$.

Lời giải

a) $$\lim_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x^2-5x+6}\right)=\lim_{x\to2^+}\frac{x-3-(x-1)}{(x-2)(x-1)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{-2}{x-2}\cdot\frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

Mà $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-2}{x-2}=-\infty$ (do $\lim\limits_{x\to 2^+}(-1)=-1<0$, $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$, $x-2>0$)

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{1.(-1)}=-1<0.$$

Nên $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-1)^2-\left(4x^2-4x-3\right)}{2x-1+\sqrt{4x^2-4x-3}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2x-1+\sqrt{4x^2-4x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}}{2-\frac{1}{x}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{3}{4x^2}}}=0.$$

Ví dụ 9. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+x-\sqrt[3]{x^3-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3-1}\right).$$

* Ta có :

$$+\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

$$+\ \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-\left(x^3-1\right)}{x^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-1}+\left(\sqrt[3]{x^3-1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+x\cdot\sqrt[3]{x^3-1}+\left(\sqrt[3]{x^3-1}\right)^2}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)=0+0=0.$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}-x+x+\sqrt{x^2+2}\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}-x\right)+\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$$

* Ta có :

$$+\ \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(x^2+2\right)}{x-\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x-\sqrt{x^2+2}}=0.$$

$$+\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-1-x^3}{\left(\sqrt[3]{3x^3-1}\right)^2+x\cdot\sqrt[3]{3x^3-1}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-1}{\left(\sqrt[3]{3x^3-1}\right)^2+x\cdot\sqrt[3]{3x^3-1}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot\frac{2-\frac{1}{x^3}}{\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}+1}\right)=-\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)=-\infty.$$

Ví dụ 10. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4x-2}\sqrt{\dfrac{8x^2+x-3}{x+4}}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{\sqrt{x-2}}\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}\right)=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4x-2}\sqrt{\dfrac{8x^2+x-3}{x+4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{8x^2+x-3}{(4x-2)^2(x+4)}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{\left(4-\frac{2}{x}\right)^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}}=0.$$

3. Giới hạn hàm lượng giác

3.1. ***Phương pháp:*** Dùng các công thức lượng giác biến đổi giới hạn đã cho thành tích và ước lượng các thừa số tiến tới 0 để khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ hoặc thành dạng có thể áp dụng được các công thức sau :

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$

3.2. ***Chú ý :*** Ta có thể chứng minh được:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$;

  $\lim\limits_{x\to x_0}\tan x=\tan x_0$, $\left(x_0\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $\lim\limits_{x\to x_0}\cot x=\cot x_0$, $(x_0\neq k\pi)$.

3.3. Các ví dụ minh họa :

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5.\sin5x}{5x}=5.\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{5x}=5$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{x.\sin2x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x.\cos2x.\cos3x}{x^2}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{x.\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin4x.\sin x}{x.\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-4.\dfrac{\sin4x}{4x}.\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\sin2x}{2x}}=-4$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x.\cos2x.\cos3x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x+\cos x.(1-\cos2x)+\cos x.\cos2x.(1-\cos3x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos x.2\sin^2x+\cos x.\cos2x.2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{8\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}+\cos x\cdot\dfrac{2\sin^2x}{x^2}+\cos x.\cos2x.\dfrac{\dfrac{9}{2}\sin^2\dfrac{3x}{2}}{\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2}\right]=8+2+\dfrac{9}{2}=\dfrac{29}{2}$.

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan2x.\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{1-\sqrt{2}\sin x}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan2x.\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2x}\cdot\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\tan x}{(1+\tan x)^2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{1-\sqrt{2}\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}}{\dfrac{\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}-\sin x\right)}{\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}}{\dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{2}\right)}{2\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{2}\right)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=1$.

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{\tan(x-1)}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{\tan(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+3-4x^2}{\left(\sqrt{x+3}+2x\right).\tan(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(4x+3)(x-1)}{\left(\sqrt{x+3}+2x\right).\tan(x-1)}=\dfrac{-7}{(2+2)}\cdot1=-\dfrac{7}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sin x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$

* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\sin x}=\dfrac{2}{1+1}\cdot1=1$.

* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{\left[1+\sqrt[3]{x^2+1}+\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2\right]\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{\left[1+\sqrt[3]{x^2+1}+\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2\right]}\cdot\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{0}{3}.1=0$

Vậy $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}=1+0=1$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^2-3x+2\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x-4}{(x-3)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{9x^2+2x}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cos\dfrac{x}{x^2-1}$.

Bài 2. Chứng minh các dãy số sau không có giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\cos(3x-1)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{x+2}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ khi $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & (x\ge 2)\\ 3x+5 & (x<2)\end{cases}$.

Bài 3. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+1}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+1\right)\cos 3x$.

Bài 4. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{x+5}$; b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^2+2x-3}$;

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{(x-2)(x^2-2x-3)}$; f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{3x^3+4x^2-x+6}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$; h) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$

Bài 5. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-\sqrt{3x+58}}{x-2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt{1+6x}-1}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2+4x+19}-\sqrt{3x^2+46}}{x^2-1}$.

Bài 6. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a}}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+2x}-1}{\sqrt[m]{1+3x}-1}$.

Bài 7. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-\sqrt{5x+4}}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{2x^2-5x+2}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3\sqrt[3]{4x^3-24}+\sqrt{x+2}-8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}$.

Bài 8. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1+3x-2x^2}{x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$; d) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-6+\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+x^3}}$.

Bài 9. Tìm giới hạn của các hàm số sau , tại các điểm đã chỉ ra :

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{9-x^2}{x-3} & \text{khi } x<3\\ 1-x & \text{khi } x\ge 3\end{cases}$ taïi $x=3$;

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & \text{khi } x>0\\ \dfrac{3}{2} & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ taïi $x=0$;

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}(2x^2+3) & ,(x\le 1)\\ 6-5x & ,(1<x<3)\\ x-3 & ,(x\ge 3)\end{cases}$ Tìm $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$;

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & \text{khi } x>1\\ m^2x^2-2mx+1 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$, tại $x_0=1$;

e) Cho $f(x)=\begin{cases} \left|x^2-5x+6\right| & ; x>2 \\ mx+4 & ; x\le 2 \end{cases}$

Tìm m để $f(x)$ có giới hạn tại $x=2$.

Bài 10. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x+6}{4x^3-3x+5}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^4(5x+3)^6(6x+2)^7}{(3-2x)^5(6-3x)^9(7-2x)^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{2|x|+1}$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$; h) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$.

Bài 11. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}-\sqrt{3x}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{4x^2-3x}+3\sqrt[3]{x^3-x}-7\sqrt{x^2+3}\right)$;

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5x^3-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}+x}$.

Bài 12. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x.\sin 3x.\sin x}{45x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cdots.\cos nx}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$;

i) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{\pi+4x}$; k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\sin x}$;

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$; m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x+\sqrt{1+\sin 3x}}{1+\sin 3x}$;

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt[3]{4x^2+1}}{1-\cos x}$; o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các khái niệm về hàm số liên tục

1.1. ***Hàm số liên tục tại một điểm:*** Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

1.2. ***Hàm số liên tục trên một khoảng:*** Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a\,;b)$ khi nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

1.3. ***Hàm số liên tục trên một đoạn [a; b]:*** Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a\,;b]$ khi nó liên tục trên khoảng $(a\,;b)$ và $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)\end{cases}$

2. Các tính chất của hàm số liên tục

2.1. ***Định lí 1:***

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

2.2. ***Định lí 2:*** Giả sử $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$, $y=f(x)\cdot g(x)$ liên tục tại x_0.
- Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

2.3. ***Định lí 3 :*** Nếu $y=f(x)$ liên tục trên $[a\,;b]$. Đặt $m=\min\limits_{[a\,;b]}f(x)$, $M=\max\limits_{[a\,;b]}f(x)$. Khi đó với mọi $C\in(m\,;M)$ luôn tồn tại ít nhất một số $c\in(a\,;b)$ sao cho $f(c)=C$.

- ***Hệ quả 1:*** Nếu $y=f(x)$ liên tục trên $[a\,;b]$ và $f(a)\cdot f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một số $c\in(a\,;b)$ sao cho $f(c)=0$.

➢ ***Nói cách khác:*** Nếu $y=f(x)$ liên tục trên $[a\,;b]$ và $f(a)\cdot f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $c\in(a\,;b)$.

- ***Hệ quả 2:*** Nếu $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(x)\neq 0, \forall x\in(a;b)$ thì $f(x)$ không đổi dấu trên $(a;b)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

1.1. Phương pháp: Để xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 ta thực hiện các bước:

- Tính $f(x_0)$.
- Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (trong nhiều trường hợp để tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ta cần tính $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$).
- So sánh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$ và rút ra kết luận.

1.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x+1} & \text{khi } x\neq 1\\ -1 & \text{khi } x=1\end{cases}$, tại $x=1$;

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x>5\\ (x-5)^2+3 & \text{khi } x\le 5\end{cases}$, tại $x=5$.

Lời giải

a) Ta có: $f(1)=-1$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x+1}=-1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=-1$. Nên $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

b) Ta có: $f(5)=3$;

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^+}\left[(x-5)^2+3\right]=3$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}=\lim_{x\to 5^+}\frac{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}{2x-1-9}$$

$$=\lim_{x\to 5^+}\frac{\sqrt{2x-1}+3}{2}=\frac{3+3}{2}=3\Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x)=3=f(5).$$

Nên $f(x)$ liên tục tại $x=5$.

Ví dụ 2. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm đã chỉ ra:

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại $x=1$.

Lời giải

$f(1)=3+m$;

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+2)=3.$$

$f(x)$ liên tục tại $x=1\Leftrightarrow 3+m=3\Leftrightarrow m=0$.

2. Xét tính liên tục của hàm số trên khoảng, đoạn

2.1. Phương pháp:

- Để xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ trên một khoảng, đoạn ta dùng các định nghĩa về hàm số liên tục trên khoảng, đoạn và các định lí 1, 2 để suy ra kết luận.
- Cần biết thêm $f(x)$ liên tục trên $[a;b)$ khi nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$. $f(x)$ liên tục trên $(a;b]$ khi nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

2.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của nó:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & \text{khi } x\neq\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x=\sqrt{2}\end{cases}$$

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$,

* Khi $x\neq\sqrt{2}\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ nên nó liên tục $\forall x\neq\sqrt{2}$.

(vì là hàm phân thức có mẫu khác 0).

* Xét tại điểm $x=\sqrt{2}$, ta có: $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

Nên $f(x)$ liên tục tại điểm $x=\sqrt{2}$. Vậy $f(x)$ liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm m để hàm số sau liên tục trên tập xác định của nó:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{khi } x<1\\ 2 & \text{khi } x=1\\ mx+1 & \text{khi } x>1\end{cases}.$$

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$,

- Khi $x<1$ thì $f(x)=x^2+x$ là đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty\,;1)$.
- Khi $x>1$ thì $f(x)=mx+1$ là đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(1\,;+\infty)$.
- Xét tại $x=1$, ta có: $f(1)=2$.

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(mx+1)=m+1\,;$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^2+x)=2$$

Suy ra $f(x)$ liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$

$$\Leftrightarrow m+1=2 \Leftrightarrow m=1.$$

Vậy $f(x)$ liên tục trên $D=\mathbb{R} \Leftrightarrow m=1$.

Ví dụ 3. Tìm các điểm gián đoạn của các hàm số sau :

a) $f(x)=\dfrac{3x^2-4x+5}{x^2-4x+3}$; b) $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & \text{khi } x\le 0\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x>0\end{cases}$.

Lời giải

a) Ta thấy $f(x)=\dfrac{3x^2-4x+5}{x^2-4x+3}$ là hàm phân thức hữu tỷ , có mẫu số :

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$, nên $f(x)$ có hai điểm gián đoạn $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

b) * Khi $x<0$ thì $f(x)=1-\cos x$ là hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty\,;0)$.

* Khi $x>0$ thì $f(x)=\sqrt{x+1}$ là hàm số liên tục trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

* Xét tại $x=0$, ta có: $f(0)=1-\cos0=0$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(1-\cos x)=1-\cos0=0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{0+1}=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0^+} f(x)\ne\lim_{x\to0^-} f(x)\Rightarrow \bar{\exists}\lim_{x\to0} f(x),$$

tức là $f(x)$ không liên tục tại $x=0$. Vậy hàm số $f(x)$ có một điểm gián đoạn $x=0$.

3. Chứng minh phương trình có nghiệm

3.1. Phương pháp:

- Biến đổi phương trình thành dạng: $f(x)=0$
- Tìm ra hai số a,b sao cho $f(a)\cdot f(b)<0$.
- Chứng minh $f(x)$ liên tục trên $[a\,;b]$ từ đó suy ra $f(x)=0$ có nghiệm .

➢ ***Chú ý:***

- Nếu $f(a)\cdot f(b)\le0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $[a\,;b]$.
- Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a\,;+\infty)$ và $f(a)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(a\,;+\infty)$.

- Nếu $f(x)$ liên tục trên $[-\infty\,;b)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\cdot f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(-\infty\,;b)$.
- Để chứng minh $f(x)=0$ có ít nhất n nghiệm trên $[a\,;b]$, ta chia đoạn $[a\,;b]$ thành n đoạn nhỏ rời nhau, rồi chứng minh trên mỗi khoảng đó phương trình có ít nhất một nghiệm .

3.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^5-3x+3=0$; b) $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$.

Lời giải

a) Đặt $f(x)=x^5-3x+3$

Ta có : $f(-2)=-32+6+9=-17$; $f(0)=3\Rightarrow f(-2).f(0)<0$

Mà $f(x)=x^5-3x+3$ là đa thức nên liên tục trên $[-2\,;0]$.

Nên phương trình : $x^5-3x+3=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-2\,;0)$.

b) Đặt $f(x)=x^4+x^3-3x^2+x+1$

Ta có : $f(-1)=1-1-3-1+1=-3$; $f(0)=1\Rightarrow f(-1).f(0)<0$

Mà $f(x)=x^4+x^3-3x^2+x+1$ là đa thức nên liên tục trên $[-1\,;0]$.

Nên phương trình : $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1\,;0)$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm::

a) $(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3=0$; b) $m(2\cos x-\sqrt2)=2\sin5x+1$.

Lời giải

a) Đặt $f(x)=(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3$

Ta có : $f(-1)=-1$; $f(-2)=2+m^2>0,\forall m\Rightarrow f(-2).f(-1)<0$

Mà $f(x)=(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3$ là đa thức nên liên tục trên $[-2\,;-1]$ Nên phương trình : $(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3=0$ có ít nhất một nghiêm trên $(-2\,;-1)$ với mọi giá trị của m .

b) Đặt $f(x)=m(2\cos x-\sqrt2)-2\sin5x-1$

Ta có : $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt2-1$; $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1-\sqrt2\Rightarrow f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right).f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<0$

Mà $f(x)=m(2\cos x-\sqrt2)-2\sin5x-1$ liên tục trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Nên phương trình : $m(2\cos x-\sqrt2)=2\sin5x+1$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$ với mọi giá trị của m .

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình: $x^5-5x^3+4x-1=0$ (1) có đúng 5 nghiệm.

Lời giải

a) Đặt $f(x)=x^5-5x^3+4x-1$

Ta có: $f(-2)=-1$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{73}{32}$; $f(-1)=-1$;

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{32}$; $f(1)=-1$; $f(3)=119$

Mà $f(x)=x^5-5x^3+4x-1$ là đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

$*f(-2)\cdot f\left(-\frac{3}{2}\right)<0$, nên (1) có ít nhất một nghiệm $x_1\in\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$.

$*f\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot f(-1)<0$, nên (1) có ít nhất một nghiệm $x_2\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)$.

$*f(-1)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$, nên (1) có ít nhất một nghiệm $x_3\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

$*f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$, nên (1) có ít nhất một nghiệm $x_4\in\left(\frac{1}{2};1\right)$.

$*f(1)\cdot f(3)<0$, nên (1) có ít nhất một nghiệm $x_5\in(1;3)$.

Mặt khác $\left(-2;-\frac{3}{2}\right);\left(-\frac{3}{2};-1\right);\left(-1;\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};1\right);(1;3)$ đôi một giao nhau bằng rỗng $\Rightarrow x_1\neq x_2\neq x_3\neq x_4\neq x_5$, tức là (1) có ít nhất 5 nghiệm phân biệt. Mặt khác (1) là phương trình bậc 5 nên nó có nhiều nhất là 5 nghiệm, tức là (1) có đúng 5 nghiệm.

Ví dụ 4. Tìm *m* để phương trình: $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1<-1<x_2<x_3$.

Lời giải

Đặt $f(x)=x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3$ dễ thấy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

* Điều kiện cần: Giả sử (1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1<-1<x_2<x_3\Rightarrow f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có: $f(-1)=(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)>0$ do $x_1<-1<x_2<x_3$

Mà $f(-1)=-m-5$, suy ra $-m-5>0\Leftrightarrow m<-5$

* Điều kiện đủ:

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\Rightarrow\exists a<-1$ sao cho $f(a)<0$,

Do $m<-5\Rightarrow f(-1)=-m-5>0$, $f(0)=m-3<0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow\exists b>0$ sao cho $f(b)>0$.

Vậy khi $m<-5$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1<-1<x_2<x_3$.

Ví dụ 5. Chứng minh phương trình $x^4-x-3=0$ luôn có ít nhất một nghiệm x_0 thỏa mãn điều kiện: $x_0>\sqrt[7]{12}$.

Lời giải

Đặt $f(x)=x^4-x-3$ dễ thấy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$f(0)=-3$; $f(2)=11\Rightarrow f(0).f(2)<0$

nên $x^4-x-3=0$ có ít nhất một nghiệm $x_0\in(0;2)\Rightarrow x_0^4=x_0+3$, vì $x_0\in(0;2)\Rightarrow x_0>0$ theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$x_0^4=x_0+3\geq 2\sqrt{3x_0}\Leftrightarrow x_0^8\geq 4.3x_0\Leftrightarrow x_0^7\geq 12\Leftrightarrow x_0\geq\sqrt[7]{12}$$

Để dấu "=" xảy ra thì $x_0=3$. Do $x_0\in(0;2)$ nên đẳng thức không xảy ra.

Vậy phương trình: $x^4-x-3=0$ luôn có ít nhất một nghiệm x_0 thỏa mãn điều kiện: $x_0>\sqrt[7]{12}$.

4. Xét dấu một biểu thức

4.1. Phương pháp:

Ta áp dụng hệ quả: Nếu $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(a;b)$ thì $f(x)$ không đổi dấu trên $(a;b)$ để xét dấu biểu thức $f(x)$ trên miền D theo các bước sau:

- Tìm các điểm gián đoạn của $f(x)$ trên D.
- Tìm tất cả các số $x_i\in D$, $(i=\overline{1,n})$ sao cho $f(x_i)=0$.
- Chia miền D thành những khoảng nhỏ bởi các điểm gián đoạn của $f(x)$ và các điểm $x_i\in D$, $(i=\overline{1,n})$ vừa tìm ở bước 2.
- Trên mỗi khoảng nhỏ đó lấy một số *m* tùy ý, tính $f(m)$, dấu của $f(x)$ trên khoảng đó chính là dấu của $f(m)$

Từ đó suy ra được dấu của $f(x)$ trên miền D.

4.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x)=2x^4-7x^3-5x^2+28x-12$; b) $g(x)=x^2-3+\sqrt{9-x^2}$.

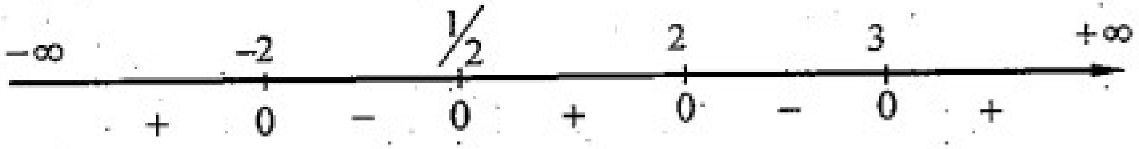
Lời giải

a) $f(x)=2x^4-7x^3-5x^2+28x-12$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

$$f(x)=2x^4-7x^3-5x^2+28x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1/2\\ x=3\\ x=2\end{array}\right.$$

Mặt khác : $f(-3)=210$, $f(0)=-12$, $f(1)=6$, $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{9}{2}$, $f(4)=84$

Do đó , ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:



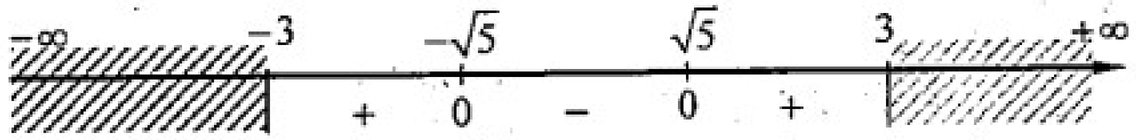
b) $g(x)=x^2-3-\sqrt{9-x^2}$ xác định trên $[-3;3]$ và liên tục trên đoạn đó

$$g(x)=x^2-3-\sqrt{9-x^2}=0\Leftrightarrow\sqrt{9-x^2}=x^2-3$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3\ge0\\9-x^2=\left(x^2-3\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\sqrt{3}\vee x>\sqrt{3}\\-x^4-5x^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{5}\\x=\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Mặt khác: $g\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{13}{4}-\frac{\sqrt{11}}{2}>0$, $g(0)=-6<0$, $g\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{13}{4}-\frac{\sqrt{11}}{2}>0$

Do đó , ta có bảng xét dấu của $g(x)$ như sau:



Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $(x-3)\sqrt{x^2-4}\ge x^2-9$;

b) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}\ge5$.

Lời giải

a) $(x-3)\sqrt{x^2-4}\ge x^2-9\Leftrightarrow(x-3)\sqrt{x^2-4}-\left(x^2-9\right)\ge0$

Đặt $f(x)=(x-3)\sqrt{x^2-4}-\left(x^2-9\right)$,

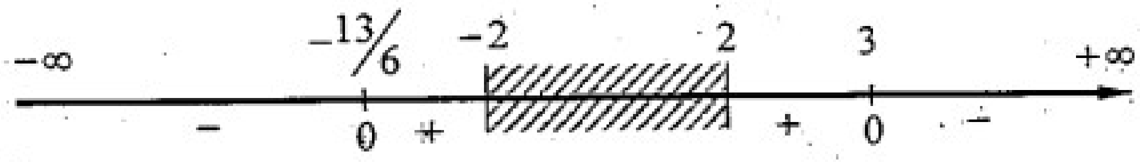
dễ thấy $f(x)$ liên tục trên miền : $D=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

$$f(x)=(x-3)\sqrt{x^2-4}-\left(x^2-9\right)=0\Leftrightarrow(x-3)\left[\sqrt{x^2-4}-(x+3)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3=0\\\sqrt{x^2-4}=x+3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\\begin{cases}x\ge-3\\x^2-4=(x+3)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-\frac{13}{6}\end{array}\right.$$

Mặt khác: $f(-3)=-6\sqrt{5}$, $f\left(-\frac{21}{10}\right)\approx1,32$, $f\left(\frac{5}{2}\right)=2$, $f(4)\approx-3,53$

Do đó , ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:



Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm : $S=\left[-\frac{13}{6};-2\right]\cup[2;3]$.

b) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}\ge5$

$\Leftrightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}-5\ge0$

Đặt $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}-5$, dễ thấy $f(x)$ liên tục trên miền: $D=[-1;4]$

$$f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}-5=0\quad(1)$$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}$, $(t\ge0)$

$$\Rightarrow t^2=x+1+4-x+2\sqrt{(x+1)(4-x)}\Rightarrow\sqrt{(x+1)(4-x)}=\frac{t^2-5}{2}$$

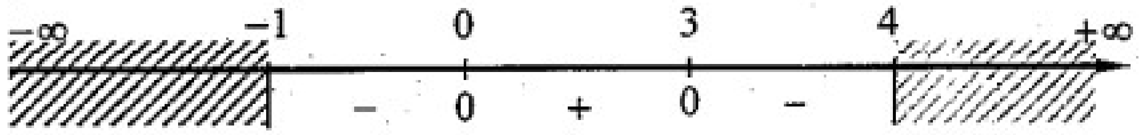
Khi đó, ta được: $t+\frac{t^2-5}{2}=5\Leftrightarrow t^2+2t-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-5\\t=3\end{array}\right.\Leftrightarrow t=3(t\ge0)$

$$\Rightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=3$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)(4-x)}=2\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$$

Mặt khác : $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-0,68$, $f(1)\approx0,6$, $f\left(\frac{7}{2}\right)=-0,67$

Do đó, ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:



Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm : $S=[0;3]$.

➢ ***Chú ý:*** Dựa vào phương pháp này ta có thể chuyển việc giải một bất phương trình $f(x)>0$ (thường là phải lập luận phức tạp) về giải việc giải một phương trình $f(x)=0$ (có cách giải đơn giản hơn), sau đó xét dấu $f(x)$ và từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình .

C. BÀI TẬP

Bài 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau , tại các điểm đã được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1} & \text{khi } x\ne1\\2 & \text{khi } x=1\end{cases}$, tại $x=1$;

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\ne2\\2 & \text{khi } x=2\end{cases}$, tại $x=2$;

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=1\end{cases}$, tại $x=1$;

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x>5\\ (x-5)^2+3 & \text{khi } x\leq 5\end{cases}$, tại $x=5$;

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-x-1}{2-\sqrt[3]{2x+6}} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{3}{2} & \text{khi } x=1\\ \dfrac{x+1}{2} & \text{khi } x<1\end{cases}$, tại $x=1$;

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x<0\\ \sqrt{x+\dfrac{1}{4}} & \text{khi } x\geq 0\end{cases}$, tại $x=0$.

Bài 2. Tìm *m*, *n* để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\neq 1\\ x+2m & \text{khi } x=1\end{cases}$, tại $x=1$;

b) $f(x)=\begin{cases}m & \text{khi } x=0\\ \dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)} & \text{khi } x\neq 0, x\neq 3\\ n & \text{khi } x=3\end{cases}$, tại $x=0$ và $x=3$;

c) $f(x)=\begin{cases}x^2+n & \text{khi } x<1\\ 2mx-3 & \text{khi } x>1\\ m+2 & \text{khi } x=1\end{cases}$, tại $x=1$;

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+9}+2x-9}{2x-6} & \text{khi } x\neq 3\\ 3x+m & \text{khi } x=3\end{cases}$, tại $x=3$.

Bài 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau :

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3 & \text{khi } x\geq -1\\ 3\cos x-1 & \text{khi } x<-1\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1} & \text{khi } x\neq -1\\ \dfrac{4}{3} & \text{khi } x=-1\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+27}{x^2-9} & \text{khi } x<3\\ 5 & \text{khi } x=3\\ 2x-1 & \text{khi } x>3\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-8x}{x^2-x-2} & \text{khi } x\neq -1,\ x\neq 2\\ 8 & \text{khi } x=2\\ 14 & \text{khi } x=-1\end{cases}$.

Bài 4. Tìm các giá trị của *m* để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\cos(x-1)+1 & \text{khi } x\leq 1\\ mx+1 & \text{khi } x>1\end{cases}$

Bài 5. Chứng minh hàm số sau liên tục trên $[1;+\infty)$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x-1}+x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}} & \text{khi } x>1\\ 1 & \text{khi } x=1\end{cases}.$$

Bài 6. Tìm các điểm gián đoạn của các hàm số sau:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-3x-4}$; b) $f(x)=\dfrac{x^2.\cos x}{x^2-2x+1}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & \text{khi } x\neq\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x=\sqrt{2}\end{cases}$.

Bài 7. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^3-3x+3=0$; b) $x^5+x-1=0$.

c) $x^4+x^3-2010x^2+x-1=0$; d) $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$.

Bài 8. Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3-3x+1=0$; b) $x^3+6x^2+9x+1=0$

c) $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$; d) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

Bài 9. Chứng minh rằng phương trình sau có đúng 3 nghiệm :

$$x^3-2\left(m^2+2\right)x^2+mx+m^2+m+1=0.$$

Bài 10. Chứng minh rằng phương trình sau có đúng 4 nghiệm

$$x^4-x^3-9x^2+2x+14=0\ .$$

Bài 11. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m :

a) $m(x-1)^3(x-2)+2x-3=0$; b) $x^4+mx^2-2mx-2=0$

c) $a.\cos 2x+b\sin x+\cos x=0$; d) $\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}=m$.

Bài 12. Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^3+ax^2+bx+c=0$;

b) $ax^2+bx+c=0$ nếu $2a+3b+6c=0$;

c) $ax^2+bx+c=0$ nếu $2a+6b+19c=0$ thì luôn có nghiệm dương ;

d) $x^3+ax^2+bx+c=0$ nếu $4a+8b+21c+2=0$;

e) $a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$;

f) $x^4+ax^3+bx^2+cx-\dfrac{2b}{3}-\dfrac{2}{3}=0$;

g) $a\cos^4 x+b\cos^3 x-2c.\cos x=2a.\sin^3 x$.

Bài 13. (*) Chứng minh phương trình $x^5-2x-2=0$ luôn có ít nhất một nghiệm x_0 thỏa mãn điều kiện : $\sqrt[9]{16}<x_0<2$.

Bài 14. Chứng minh rằng với mọi số thực $m\in(2;34)$ phương trình sau :

$$x^3+3x-2=m$$

có ít nhất một nghiệm $x\in(1;3)$:

Bài 15. (*) Tìm *m* để phương trình : $-x^3+2x^2+(m-3)x+m-9=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt x_1 , x_2 , x_3 sao cho $x_1<x_2<2<x_3$

Bài 16. Xét dấu các biểu thức sau :

a) $f(x)=x^4+2x^3-25x^2-26x-120$;

b) $g(x)=\sqrt{x^2+x+3}+x-1$;

c) $h(x)=\sin 2x-\sin x$ trên $[-\pi;\pi]$.

Bài 17. (*) Giải các bất phương trình sau :

a) $(x+3)\sqrt{2x^2+1}>x^2+x+3$;

b) $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}>6$;

c) $x^3+1>2\sqrt[3]{2x-1}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Bài 1. *Đáp số :*

a) 0 ; b) 0 ; c) 2 ; d) 0 ; e) –1 ; f) $-\dfrac{1}{3}$.

Bài 2. *Đáp số :*

a) 2 ; b) 1 ; c) $\dfrac{64}{45}$; d) $\dfrac{49}{16}$; e) $\dfrac{1}{5}$; f) –3 .

Bài 3. *Đáp số :*

a) 1 ; b) –1 ; c) 1 ; d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e) 32 ; f) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 4. Tìm các giới hạn sau :

a) 0 ; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$; d) –1 ; e) 0 ; f) $\dfrac{2}{3}$.

g) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n+n-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)$

$$=\lim\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}+\lim\frac{-n^2}{n^2+n.\sqrt[3]{n^2+n^3}+\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)^2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

h) $\lim\left(\sqrt{9n^2+2n}-\sqrt[3]{8n^3+6n+1}-n\right)$

$$=\lim\left(\sqrt{9n^2+2n}-3n-\sqrt[3]{8n^3+6n^2+1}+2n\right)$$

$$=\lim\left(\sqrt{9n^2+2n}-3n\right)-\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+6n^2+1}-2n\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$$

Bài 5. Tìm các giới hạn sau :

a) 1 ; b) 7 ; c) $-\dfrac{1}{2}$; d) $-\dfrac{2}{3}$; e) $\dfrac{1}{3}$;

$$\text{f) }\lim\frac{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\lim\frac{\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}}{\dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}}}=\frac{5}{12}\lim\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}=\frac{5}{12}.$$

Bài 6. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\frac{1+2+...+n}{n^2}=\lim\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$;

b) $\lim\frac{n.\sqrt{1+3+\cdots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}=\lim\frac{n\cdot\sqrt{\frac{n(2n)}{2}}}{2n^2+n+1}=\lim\frac{1}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$

c) $\lim\frac{1^2+3^2+...+(2n-1)^2}{n^3}=\lim\frac{\frac{n(4n^2-1)}{3}}{n^3}=\lim\frac{4-\frac{1}{n^2}}{3}=\frac{4}{3}$;

d) $\lim\left[\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+...+\frac{1}{2n(2n+2)}\right]$

$=\lim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)=\lim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{4}$;

e) Hướng dẫn : $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{k\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k}}{-k(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Nên $u_n=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow\lim u_n=1$;

f) Đặt : $u_n=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}\Rightarrow u_n^2=\frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot\cdots\cdot(2n)^2}{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot\cdots\cdot(2n+1)^2}$

$=\frac{1.3}{3^2}\cdot\frac{3.5}{5^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n)(2n+2)}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{2n+2}<\frac{1}{2n+2}$

Do: $\frac{1.3}{3^2}\cdot\frac{3.5}{5^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n-1)(2n+3)}{(2n+1)^2}<\frac{3^2}{3^2}\cdot\frac{5^2}{5^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2}=1$

Vậy ta có : $0<u_n<\frac{1}{\sqrt{2n+2}},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Mà $\lim\frac{1}{\sqrt{2n+2}}=0=\lim 0$

$\Rightarrow\lim\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\cdots\cdot(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}=0$; g) 0.

Bài 7. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=-7\\u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-\frac{20}{3},\ (n\ge1)\end{cases}$

a) Chứng minh rằng: $v_n=u_n+10$ là cấp số nhân.

Vì $v_{n+1}=u_{n+1}+10=\frac{1}{3}u_n-\frac{20}{3}+10=\frac{1}{3}(u_n+10)=\frac{1}{3}v_n$

Suy ra (v_n) là cấp số nhân có $q=\frac{1}{3}$; $v_1=3$

b) Ta có : $v_n=v_1q^{n-1}=3.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\Rightarrow\lim v_n=3\lim\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$

$\Rightarrow\lim(u_n+10)=0\Rightarrow\lim u_n=-10$.

Bài 8. Tìm $\lim u_n$ biết :

a) $\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2}\ (n\in\mathbb{N}^*)\end{cases}$

Đặt $v_n=u_n-1\Rightarrow v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$

Nên (v_n) là cấp số nhân có $q=\frac{1}{2}$, $v_1=2\Rightarrow v_n=2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow\lim(u_n-1)=\lim v_n=2\lim\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0\Rightarrow\lim u_n=1$.

b) Chứng minh bằng quy nạp ta được $u_n=2,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\lim u_n=\lim2=2$.

Bài 9. Tính các tổng sau :

a) $S=5-\sqrt{5}+1-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{5}+\cdots=\frac{5}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{5\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{4}$;

b) $S=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3$.

Bài 10. Theo giả thiết ta có : $\begin{cases}S=\frac{u_1}{1-q}=18\\u_3=u_1q^2=\frac{4}{3}\end{cases}$

Giải hệ trên ta được :

$$\begin{cases}u_1=12\\q=\frac{1}{3}\end{cases}\vee\begin{cases}u_1=6(2-\sqrt{3})\\q=\frac{1}{3}(1+\sqrt{3})\end{cases}\vee\begin{cases}u_1=6(2+\sqrt{3})\\q=\frac{1}{3}(1-\sqrt{3})\end{cases}$$

Bài 11. Theo giả thiết ta có : $\begin{cases} S = \dfrac{u_1}{1-q} = 12 \\ u_1 > 0 \\ u_1 - u_1 q = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Giải hệ trên ta được : $\begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Bài 12. Biểu diễn dưới dạng phân số, các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau :

a) $x = 0,467467467\cdots = \dfrac{467}{10^3} + \dfrac{467}{10^6} + \dfrac{467}{10^9} + \cdots\cdots = \dfrac{\dfrac{467}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^3}} = \dfrac{467}{999}$.

b) $y = -3,123412341234\cdots = -3 - \left(\dfrac{1234}{10^4} + \dfrac{1234}{10^8} + \dfrac{1234}{10^{12}} + \cdots\cdots\right)$

$$= -3 - \frac{\dfrac{1234}{10^4}}{1 - \dfrac{1}{10^4}} = -3 - \frac{1234}{9999} = -\frac{31231}{9999}.$$

Bài 13. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim \dfrac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1} = +\infty$; b) $\lim\left(3n^3 - 7n + 11\right) = +\infty$;

c) $\lim \sqrt[3]{1 + 2n - n^3} = -\infty$; d) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = +\infty$;

e) $\lim\left(\sqrt{n^2 - n + 3} + n\right) = +\infty$; f) $\lim \dfrac{4^{n+1} + 8^{n+2}}{5^n + 6^n} = +\infty$;

g) $\lim \dfrac{4^n - 7^n}{2^n + 3.5^n} = -\infty$;

h) $\lim \dfrac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} = \lim \dfrac{\dfrac{a^{n+1} - 1}{a-1}}{\dfrac{b^{n+1} - 1}{b-1}} = \dfrac{b-1}{a-1} \lim \dfrac{a^{n+1} - 1}{b^{n+1} - 1}$

+ Khi $0 < a < b < 1 \Rightarrow \lim \dfrac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} = \dfrac{b-1}{a-1}$.

+ Khi $0 < a < 1 < b \Rightarrow \lim \dfrac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} = 0$.

+ Khi $1 < a < b \Rightarrow \lim \dfrac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} = \dfrac{b-1}{a-1} \lim \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1}{b}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{1}{b}\right)^{n+1}} = 0$.

+ Khi $0 < b < a < 1 \Rightarrow \lim \dfrac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} = \dfrac{b-1}{a-1}$.

+ Khi $0 < b < 1 < a \Rightarrow \lim \dfrac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} = +\infty$.

+ Khi $1 < b < a \Rightarrow \lim \dfrac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} = \dfrac{b-1}{a-1} \lim \dfrac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1}{a}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{1}{a}\right)^{n+1}} = 0$

i) $\lim n\left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - 3n\right) = -\infty$;

k) $\lim n\left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}\right) = +\infty$

l) $\lim\left(n^2 - 2\cos 3n + 2\right) = +\infty$;

m) $\lim n\left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt[3]{n^2 + n^3}\right) = +\infty$

o) $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^4 + 1}}{n} - \dfrac{\sqrt{4n^6 + 2}}{n}\right) = -\infty$

p) $\lim n^2\left[\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right] = +\infty$.

Bài 14. a) Chứng minh $-1 < u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh bằng quy nạp :

Ta có: $-1 < u_1 = -\dfrac{1}{2} < 0$.

Giả sử $-1 < u_k < 0$, $(k \geq 1)$, ta phải chứng minh $-1 < u_{k+1} < 0$.

Do $-1 < u_k < 0 \Leftrightarrow 0 < u_k + 1 < 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{u_k + 1}{\sqrt{u_k^2 + 1}} < 1$

theo giả thiết $u_{k+1}=\dfrac{u_k+1}{\sqrt{u_k^2+1}}-1\Rightarrow -1<u_{k+1}<0$.

+ Chứng minh (u_n) là dãy số giảm

Ta có : $\begin{cases} u_n+1>0 \\ \sqrt{u_n^2+1}>1 \end{cases}\Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}}-1<(u_n+1)-1=u_n\ ,\forall n$

Vậy (u_n) là dãy số giảm và bị chặn, nên (u_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Giả sử $\lim u_n=x\Rightarrow x<0$, $\lim u_{n+1}=x$.

Từ $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}}-1\quad\Rightarrow \lim u_{n+1}=\dfrac{\lim u_n+1}{\sqrt{(\lim u_n)^2+1}}-1$

$$\Leftrightarrow x=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-1,(x<0)\ \ (1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=0\ ,(x<0)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.\Rightarrow x=-1\ ,(\text{do } x<0)$$

Vậy $\lim u_n=-1$.

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau :

a) Xét hàm số : $f(x)=2x^2-3x+2$, với mọi dãy số (x_n) mà $x_n\neq -1,\forall n$ và $\lim x_n=-1$, ta có : $f(x_n)=2x_n^2-3x_n+2$

$$\Rightarrow \lim f(x_n)=\lim\left(2x_n^2-3x_n+2\right)=2(\lim x_n)^2-3\lim x_n+2=7,$$

nên $\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^2-3x+2\right)=7$.

Tương tự, ta cũng được :

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x-4}{(x-3)^2}=-\infty$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{9x^2+2x}\right)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cos\dfrac{x}{x^2-1}=0$.

Bài 2. Chứng minh các dãy số sau không có giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\cos(3x-1)$.Chọn dãy số : (x_n) với $x_n=\dfrac{1}{3}(1+n\pi)$.

Ta thấy $\lim x_n=\lim\dfrac{1}{3}(1+n\pi)=+\infty$,

$$\Rightarrow f(x_n)=\cos n\pi=\left[\begin{array}{ll} 1 & \text{khi } n=2k \\ -1 & \text{khi } n=2k+1 \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Suy ra, dãy số $(f(x_n))$ không có giới hạn, tức là : $\lim\limits_{x\to -\infty}\cos(3x-1)$ không tồn tại.

b)Tương tự ta chọn dãy số : (x_n) với $x_n=\dfrac{n\pi+4}{n\pi-2}\Rightarrow \lim x_n=1$, nhưng

$\Rightarrow f(x_n)=\sin n\dfrac{\pi}{2}=\left[\begin{array}{ll} 0 & \text{khi } n=2k \\ 1 & \text{khi } n=2k+1 \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow f(x_n)$ không có giới hạn,

tức là $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{x+2}{x-1}$ không tồn tại.

c) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ khi $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & (x\geq 2) \\ 3x+5 & (x<2) \end{cases}$

Ta có : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+2x-1\right)=7 \\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(3x+5)=11 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}f(x)$ không tồn tại.

Bài 3. *Đáp số :*

a) 1 ; b) $-\dfrac{2}{3}$; c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; d) 0 ; e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$; f) 1.

Bài 4. *Đáp số :*

a) -8 ; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $-\dfrac{2}{5}$; d) -5 ; e) $-\dfrac{1}{2}$; f) $-\dfrac{6}{19}$; g) $\dfrac{m}{n}$; h) $\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$.

Bài 5. *Đáp số :*

a) 0 ; b) -2 ; c) $\dfrac{3}{2}$; d) $\dfrac{189}{16}$; e) 5 ; f) $\dfrac{7}{24}$;

g) *Hướng dẫn :*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2+4x+19}-\sqrt{3x^2+46}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2+\sqrt{2x^2+4x+19}-5-\sqrt{3x^2+46}+7}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2+4x+19}-5}{x^2-1}-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+46}-7}{x^2-1}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{3}{14}=\frac{61}{140}.$$

Bài 6. *Đáp số :*

a) 0 ; b) 1 ; c) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$; d) $\dfrac{4}{3}$; e) $\dfrac{1}{n}$; f) $\dfrac{2m}{3n}$.

Bài 7. *Đáp số :*

a) $-\dfrac{11}{2}$; b) 1 ; c) $\dfrac{5}{2}$; d) $\dfrac{7}{162}$; e) $-\dfrac{17}{16}$.

Bài 8. *Đáp số :*

a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $\dfrac{1}{3}$; d) $-\dfrac{1}{3}$;

e) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x-6+\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}=4$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x-6+\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}=2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-6+\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$ không tồn tại.

f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+x^3}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+x^3}}=-1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+x^3}}$ không tồn tại.

Bài 9. Tìm giới hạn của các hàm số sau, tại các điểm đã chỉ ra :

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{9-x^2}{x-3} & \text{khi } x<3\\ 1-x & \text{khi } x\ge 3\end{cases}$ tại $x=3$

Ta có : + $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{9-x^2}{x-3}=-\lim\limits_{x\to 3^-}(x+3)=-6$

+ $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(1-x)=-2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}f(x)$ không tồn tại.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & \text{khi } x>0\\ \dfrac{3}{2} & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ tại $x=0$

Ta có : + $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

+ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{3}{2}$.

c) *Đáp số :* $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ không tồn tại.

d) Khi $m=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$; Khi $m\ne 0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)$ không tồn tại.

e) Khi $m=-2$ thì $f(x)$ có giới hạn tại $x=2$.

Bài 10. *Đáp số :*

a) 0 ; b) $\dfrac{62500}{750141}$; c) $\dfrac{2}{5}$; d) $+\infty$; e) 4 ; f) 0

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}=\dfrac{1}{5}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}=3$;

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}=5$.

Bài 11. *Đáp số :*

a) $\dfrac{3}{2}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) 2 ; d) $+\infty$; e) 0 ; f) $-\infty$; g) $-\dfrac{3}{2}$; h) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}$.

Bài 12. *Đáp số :*

a) $\dfrac{2}{3}$; b) $\dfrac{1}{3}$; c) cosa ; d) $\dfrac{3}{2}$; e) $\dfrac{a^2}{2}$

f) Ta có : $\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$

$$=\frac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\dots+\cos x.\cos 2x\cdots\cos(n-1)x.(1-\cos nx)}{x^2}$$

$$=\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\dots+\cos x.\cos 2x\cdots\cos(n-1)x.\frac{1-\cos nx}{x^2}$$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\dfrac{2^2}{2}$, …, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos nx}{x^2}=\dfrac{n^2}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+\dots+\frac{n^2}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

g) $\dfrac{2}{\pi}$; h) $\dfrac{\pi}{2}$; i) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; k) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; l) $\dfrac{1}{4}$;

m) Ta có :

$$\frac{\cos 3x+\sqrt{1+\sin 3x}}{1+\sin 3x}=\frac{\cos^2 3x-(1+\sin 3x)}{(1+\sin 3x)(\cos 3x-\sqrt{1+\sin 3x})}$$

$$=\frac{-(1+\sin 3x).\sin 3x}{(1+\sin 3x).(\cos 3x-\sqrt{1+\sin 3x})}=\frac{-\sin 3x}{\cos 3x-\sqrt{1+\sin 3x}}$$

Mà : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin 3x = -1 < 0$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos 3x - \sqrt{1+\sin 3x}\right) = 0$;

$$\cos 3x - \sqrt{1+\sin 3x} < 0,\ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon; \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + \sqrt{1-\sin 3x}}{1+\sin 3x} = -\infty.$$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt[3]{4x^2+1}}{1-\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^2+1} - 1}{1-\cos x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{4x^2+1} - 1}{1-\cos x} = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}.$$

o) Xét $f(x) = \dfrac{3\sin x + 2\cos x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$, với mọi dãy số (x_n) mà $\lim x_n = +\infty$,

ta có : $f(x_n) = \dfrac{3\sin x_n + 2\cos x_n}{\sqrt{x_n+1} + \sqrt{x_n}}$

Do $\left|f(x_n)\right| = \left|\dfrac{3\sin x_n + 2\cos x_n}{\sqrt{x_n+1} + \sqrt{x_n}}\right| \le \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{x_n+1} + \sqrt{x_n}}, \forall n$

mà $\lim \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{x_n+1} + \sqrt{x_n}} = 0 \Rightarrow \lim f(x_n) = 0$

Vậy, ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\sin x + 2\cos x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$.

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài 1. *Đáp số :*

a) Ta có : $f(1) = 2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x+1} = 2\ ;$$

Nên hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$. Chứng minh tương tự, ta được :

b) $f(x)$ không liên tục $x = 2$; c) $f(x)$ liên tục $x = 1$;

d) $f(x)$ liên tục $x = 5$; e) $f(x)$ không liên tục $x = 1$;

f) $f(x)$ liên tục $x = 0$.

Bài 2. *Đáp số :*

a) $m = -\dfrac{3}{2}$; b) Khi $n = \dfrac{5}{3}$ thì hàm số liên tục tại $x = 3$; Hàm số luôn gián đoạn tại $x = 0$; c) $\begin{cases} m = 5 \\ n = 6 \end{cases}$; d) $m = -\dfrac{70}{9}$.

Bài 3. *Đáp số :*

a) $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1); (-1; +\infty)$;

b) $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

c) $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3); (3; +\infty)$;

d) $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1); (-1; +\infty)$.

Bài 4. *Đáp số :*

a) $m = 3$; b) $m = 0$; c) $m = 1$.

Bài 5. + Khi $x > 1 : f(x) = \dfrac{2\sqrt{x-1} + x - 1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ luôn xác định nên hàm số sau liên tục trên $(1; +\infty)$.

+ Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2\sqrt{x-1} + x - 1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{(x-1)(x+3)}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}} = 1 = f(1)$$

Từ đó, ta có hàm số sau liên tục trên $[1; +\infty)$.

Bài 6. *Đáp số :*

a) $x = -1, x = 4$; b) $x = 1$; c) $x \in \varnothing$.

Bài 7. *Hướng dẫn :*

a) Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 3$

Ta có : $f(0) = 3; f(-3) = -15; \Rightarrow f(0).f(1) < 0$

Mà $f(x) = x^3 - 3x + 3$ là đa thức nên liên tục trên $[-3; 0]$.

Nên phương trình : $x^3 - 3x + 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-3; 0)$.

b) Chứng minh tương tự. c) Chứng minh tương tự.

d) Đặt $f(x) = 2x + 6\sqrt[3]{1-x} - 3$

Ta có : $f(0) = 3; f(1) = -1; \Rightarrow f(0).f(1) < 0$ Mà $f(x) = 2x + 6\sqrt[3]{1-x} - 3$ liên tục trên $[0; 1]$.

Nên phương trình : $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; 1)$.

Bài 8. Chứng minh rằng các phương trình sau có ít nhất 3 nghiệm phân biệt:

a) Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Ta có : $f(-2) = -1; f(0) = 1; f(1) = -1; f(2) = 3$

Mà $f(x) = x^3 - 3x + 1$ là đa thức nên liên tục trên $[-2; 2]$.

Nên phương trình: $x^3-3x+1=0$ có ít nhất 3 nghiệm trên $(-2;2)$.

b) ; c) ; d) Chứng minh tương tự.

Bài 9. Xét $f(x)=x^3-2(m^2+2)x^2+mx+m^2+m+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow \exists a<0: f(a)<0,\ \forall m$$

$$f(0)=m^2+m+1=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\ \forall m;$$

$$f(1)=-m^2+2m-2=-(m-1)^2-1<0,\ \forall m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists b>1: f(b)>0,\ \forall m.$$

Nên phương trình có ít nhất 3 nghiệm, mà phương trình đã cho là phương trình bậc 3 nên nó có nhiều nhất là 3 nghiệm. Tức là phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm.

Bài 10. Chứng minh tương tự trên.

Bài 11. Chứng minh tương tự trên.

Bài 12. Chứng minh tương tự trên.

Bài 13. Đặt $f(x)=x^5-2x-2 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mà:

$f(0)=-2$; $f(2)=26 \Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm $x_0\in(0;2)$.

Khi $x_0\in(0;2)\Rightarrow 0<x_0<2$ và $x_0^5-2x_0-2=0 \Leftrightarrow x_0^5=2x_0+2$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$x_0^5=2x_0+2\ge 2\sqrt{4x_0} \Leftrightarrow x_0^{10}\ge 16x_0 \Leftrightarrow x_0^9\ge 16 \Leftrightarrow x_0\ge\sqrt[9]{16}$$

Vì $x_0=1$ không phải là nghiệm của $x^5-2x-2=0$

nên $2x_0\ne 2 \Rightarrow x_0\ne\sqrt[9]{16}$

Vậy phương trình: $x^5-2x-2=0$ luôn có ít nhất một nghiệm x_0 thỏa mãn điều kiện: $\sqrt[9]{16}<x_0<2$.

Bài 14. Đặt $f(x)=x^3+3x-2-m$, ta có:

$$f(1)=2-m\ ;\ f(3)=34-m$$

$$\Rightarrow f(1)\cdot f(3)=(2-m)(34-m)<0,\ \forall m\in(2;34)$$

Dễ thấy $f(x)=x^3+3x-2-m$ liên tục trên $[1;3]$, suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x\in(1;3)$ với mọi số thực $m\in(2;34)$.

Bài 15. Đặt $f(x)=-x^3+2x^2+(m-3)x+m-9$

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

* Điều kiện cần : Giả sử (1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1<x_2<2<x_3 \Rightarrow f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có : $f(2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)<0$ do $x_1<x_2<2<x_3$

Mà $f(2)=3m-15 \Rightarrow f(2)<0 \Leftrightarrow m<5$

* Điều kiện đủ:

Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists a<-2: f(a)>0,\ \forall m<5;$$

$$f(-2)=13-m>0,\ \forall m<5;$$

$$f(2)=3m-15<0,\ \forall m<5$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow \exists b>2: f(b)<0,\ \forall m>5$$

Vậy khi $m>5$ thì yêu cầu của bài toán được thỏa mãn.

Bài 16. Xét dấu các biểu thức sau :

a) $f(x)=x^4+2x^3-25x^2-26x+120=0$

$\Leftrightarrow x=-5 \vee x=-3 \vee x=2 \vee x=4$.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau :

x	$-\infty$		-5		-3		2		4		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

b) $g(x)=\sqrt{x^2+x+3}+x-1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$

Ta có bảng xét dấu của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

c) $h(x)=\sin 2x-\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=K\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$$

Khi $x\in[-\pi;\pi]\Rightarrow h(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}, x=0, x=\dfrac{\pi}{3}$

Ta có bảng xét dấu của $h(x)$ như sau :

x	$-\infty$		$-\pi$		$-\pi/3$		0		$\pi/3$		π		$+\infty$
$h(x)$	▨	▨	|	+	0	−	0	+	0	−	|		

Bài 17. a) $(x+3)\sqrt{2x^2+1} > x^2+x+3$;

Xét $f(x)=(x+3)\sqrt{2x^2+1}-(x^2+x+3)$, có tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x+3)\sqrt{2x^2+1}=x^2+x+3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=\frac{x^2}{x+3}+1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}-1=\frac{x^2}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+1-1=\frac{x^2}{x+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right) \Leftrightarrow x^2\left(\frac{\sqrt{2x^2+1}+1}{x+3}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ \sqrt{2x^2+1}+1=2x+6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{2x^2+1}=2x+5 \end{array}\right.$$

Giải : $\sqrt{2x^2+1}=2x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5\ge 0 \\ 2x^2+1=4x^2+20x+25 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{5}{2} \\ x^2+10x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{5}{2} \\ x=-5\pm\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x=-5+\sqrt{13}.$$

Vậy : $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-5+\sqrt{13} \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

$-\infty$		$-5+\sqrt{13}$		0		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là : $S=\left(-\infty;-5+\sqrt{13}\right)\cup\left(0;+\infty\right)$.

b) Xét $f(x)=\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}-6$, có tập xác định : $D=(-\infty;12]$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+24}-3\right)+\left(\sqrt{12-x}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2+3\sqrt[3]{x+24}+9}+\frac{3-x}{\sqrt{12-x}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2+3\sqrt[3]{x+24}+9}-\frac{1}{\sqrt{12-x}+3}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\sqrt{12-x}-\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2-3\sqrt[3]{x+24}-6\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \\ \sqrt{12-x}-\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2-3\sqrt[3]{x+24}-6=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Giải (*) $\sqrt{12-x}-\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2-3\sqrt[3]{x+24}-6=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{12-x}-\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2-3\sqrt[3]{x+24}-\sqrt[3]{x+24}-\sqrt{12-x}=0$$

$$\Leftrightarrow -\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2-4\sqrt[3]{x+24}=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+24}\left(\sqrt[3]{x+24}+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-24 \\ x=-88 \end{array}\right.$$

Vậy: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=3$, $x=-24$; $x=-88$.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

$-\infty$		-88		-24		3		12		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		▨	

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là: $S=(-\infty;-88)\cup(-24;3)$.

c) Xét $f(x)=x^3+1-2\sqrt[3]{2x-1}$, có tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+1-2\sqrt[3]{2x-1}=0$$

Đặt $y=\sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow y^3=2x-1 \Rightarrow y^3+1=2x (*)$

Khi đó : $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$

$$\Rightarrow x^3-y^3=2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=y \quad \left(\text{do}: x^2+xy+y^2+2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2+2>0, \forall x,y\right)$$

Thế vào $(*)$, ta được: $x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy, bất phương trình có tập nghiệm là: $S=\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Chương 5:

ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

1.1. ***Định nghĩa :*** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;b)$ và $x_0\in(a\,;b)$, đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 là :

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

1.2. ***Chú ý :***

- Nếu kí hiệu $\Delta x=x-x_0$; $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ thì :

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

2. Ý nghĩa của đạo hàm

2.1. ***Ý nghĩa hình học:*** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C)

- $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ tại $M_0(x_0,y_0)\in(C)$.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0,y_0)\in(C)$ là : $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+y_0$.

2.2. ***Ý nghĩa vật lí :***

- Vận tốc tức thời của chuyển động thẳng xác định bởi phương trình : $s=s(t)$ tại thời điểm t_0 là $v(t_0)=s'(t_0)$.
- Cường độ tức thời của điện lượng $Q=Q(t)$ tại thời điểm t_0 là : $I(t_0)=Q'(t_0)$.

3. Qui tắc tính đạo hàm và công thức tính đạo hàm

3.1. ***Các quy tắc :*** Cho $u=u(x)$; $v=v(x)$; C : là hằng số .

- $(u\pm v)'=u'\pm v'$
- $(u.v)'=u'.v+v'.u\Rightarrow(C.u)'=C.u'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2},(v\neq 0)\Rightarrow\left(\dfrac{C}{u}\right)'=-\dfrac{C.u'}{u^2}$
- Nếu $y=f(u),\ u=u(x)\Rightarrow y'_x=y'_u.u'_x$.

3.2. ***Các công thức :***

- $(C)'=0$; $(x)'=1$
- $(x^n)'=n.x^{n-1}\qquad\Rightarrow(u^n)'=n.u^{n-1}.u'$, $(n\in\mathbb{N},n\geq 2)$
- $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},(x>0)\Rightarrow(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(u>0)$
- $(\sin x)'=\cos x\qquad\Rightarrow(\sin u)'=u'.\cos u$
- $(\cos x)'=-\sin x\qquad\Rightarrow(\cos u)'=-u'.\sin u$
- $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}\qquad\Rightarrow(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
- $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\qquad\Rightarrow(\cot u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

4. Vi phân

4.1. ***Định nghĩa:***

- Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là $df(x_0)=f'(x_0).\Delta x$.
- Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ thì tích $f'(x).\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $y=f(x)$.

  Kí hiệu : $df(x)=f'(x).\Delta x=f'(x).dx$ hay $dy=y'.dx$

4.2. ***Công thức tính gần đúng:*** $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$.

5. Đạo hàm cấp cao

5.1. ***Đạo hàm cấp 2:***

- *Định nghĩa:* $f''(x)=[f'(x)]'$
- *Ý nghĩa cơ học:* Gia tốc tức thời của chuyển động $s=f(t)$ tại thời điểm t_0 là $a(t_0)=f''(t_0)$.

5.2. ***Đạo hàm cấp cao:*** $f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$, $(n\in\mathbb{N},n\geq 2)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP :

1. Tìm đạo hàm theo định nghĩa

1.1. ***Phương pháp:*** Để tìm đạo hàm theo định nghĩa ta có 2 cách sau :

- ***Cách 1 :*** Theo quy tắc
  - *Bước 1 :* Cho x một số gia Δx và tìm số gia Δy

    $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
  - *Bước 2 :* Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- ***Cách 2 :*** Áp dụng công thức: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

1.2. *Các ví dụ minh họa:*

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f(x)=x^3-2x+1$ tại $x_0=2$; b) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ tại $x_0=1$.

Lời giải

a) *Cách 1:* Cho $x_0=2$ một số gia Δx

$$\Rightarrow \Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^3-2(2+\Delta x)+1-5$$

$$=\Delta x\left(\Delta x^2+6\Delta x+10\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x^2+6\Delta x+10$$

$$\Rightarrow f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x^2+6\Delta x+10\right)=10 .$$

Cách 2: Ta có $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x+1-5}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+2\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x+2\right)=10 .$$

b) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ tại $x_0=1$

Ta có $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{2x-1}{x+2}-\dfrac{1}{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-5}{3(x+2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{3(x+2)}=\dfrac{5}{9}$.

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f(x)=\sqrt[3]{3x+4}$ tại $x_0=3$;

b) $f(x)=\begin{cases}x^3-2x & \text{khi } x\ge 2\\ 10x-16 & \text{khi } x<2\end{cases}$ tại $x_0=2$.

Lời giải

a) $f(x)=\sqrt[3]{3x+4}$ tại $x_0=3$

Ta có : $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{3x+4}-\sqrt[3]{13}}{x-3}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3x-9}{(x-3)\left[\left(\sqrt[3]{3x+4}\right)^2+\sqrt[3]{13}\cdot\sqrt[3]{3x+4}+\left(\sqrt[3]{13}\right)^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3}{\left[\left(\sqrt[3]{3x+4}\right)^2+\sqrt[3]{13}\cdot\sqrt[3]{3x+4}+\left(\sqrt[3]{13}\right)^2\right]}=\frac{3}{3\sqrt[3]{13^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{169}} .$$

b) $f(x)=\begin{cases}x^3-2x & \text{khi } x\ge 2\\ 10x-16 & \text{khi } x<2\end{cases}$ tại $x_0=2$

Ta có :

$$*\ \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\left(x^3-2x\right)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+2\right)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\left(x^2+2x+2\right)=10 .$$

$$*\ \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(10x-16)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{10(x-2)}{x-2}=10$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=10=f'(2)$.

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa :

a) $y=x^3-2x^2+1$; b) $y=f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$.

Lời giải

a) Cho $x\in\mathbb{R}$ số gia Δx

$$\Rightarrow \Delta y=\left[(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2+1\right]-\left(x^3-2x^2+1\right)$$

$$=\Delta x\left[(x+\Delta x)^2+x(x+\Delta x)+x^2-2\left[(x+\Delta x)+x\right]\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=(x+\Delta x)^2+x(x+\Delta x)+x^2-2\left[(x+\Delta x)+x\right]$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[(x+\Delta x)^2+x(x+\Delta x)+x^2-2(2x+\Delta x)\right]=3x^2-4x$$

Vậy $y'=3x^2-4x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) $y=f(x)=\left|x^2-3x+2\right|=\begin{cases}x^2-3x+2 & \text{khi } x\le 1\vee x\ge 2\\ -x^2+3x-2 & \text{khi } 1<x<2\end{cases}$

* Cho $x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$ số gia Δx

$$\Rightarrow \Delta y=\left[(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+2\right]-\left(x^2-3x+2\right)$$

$$=\Delta x\left[(2x+\Delta x)-3\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=(2x+\Delta x)-3$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[(2x+\Delta x)-3\right]=2x-3$$

Vậy khi $x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$ thì $y'=f'(x)=2x-3$.

* Cho $x\in(1;2)$ số gia Δx

$$\Rightarrow \Delta y = \left[-(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - 2\right] - \left(-x^2 + 3x - 2\right)$$

$$= \Delta x\left[(-2x+\Delta x)+3\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = (-2x+\Delta x)+3$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[(-2x+\Delta x)+3\right] = -2x+3$$

Vậy khi $x \in (1;2)$ thì $y' = f'(x) = -2x+3$.

$$* \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2-0}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x-2) = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+3x-2-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)(x-2)}{x-1} = 1 ,$$

suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

$$* \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3x+2-0}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}(x-1) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+3x-2-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-1)(x-2)}{x-2} = -1 ,$$

suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 2$.

Tóm lại : $y' = f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{khi } x<1 \vee x>2 \\ -2x+3 & \text{khi } 1<x<2 \end{cases}$ và hàm số đã cho không có đạo hàm tại $x_0 = 1$ và $x_0 = 2$.

1.3. Bài tập áp dụng :

Bài 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa tại các điểm đã chỉ ra :

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ tại $x_0 = 3$; b) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ tại $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x+2}$ tại $x_0 = 4$; d) $f(x) = \cos^2 x$ tại $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

Bài 2. Xét tính liên tục và sự tồn tại đạo hàm và tính đạo hàm của các hàm số sau đây trên $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x>1 \\ 3x-5 & \text{khi } x\le 1 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2+a & \text{khi } x\le 0 \\ -x^3+bx & \text{khi } x>0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$; d) $f(x) = \sqrt{|x|^5}$.

Bài 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; d) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$;

Bài 4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa :

a) $f(x) = \left|x^3 - 4x^2\right|$; b) $f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & \text{khi } x>0 \\ 2x+1 & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^2+3x}$; d) $f(x) = \tan^3(2x+1)$.

Bài 5. Có bao nhiêu tiếp tuyến của $(C): y = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$ có hệ số góc âm ?

2. Tìm đạo hàm theo quy tắc và công thức

2.1. Phương pháp :

➢ ***Các quy tắc :*** Cho $u = u(x)$; $v = v(x)$; C : là hằng số .

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u.v)' = u'.v + v'.u \Rightarrow (C.u)' = C.u'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$, $(v \ne 0) \Rightarrow \left(\dfrac{C}{u}\right)' = -\dfrac{C.u'}{u^2}$
- Nếu $y = f(u)$, $u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x$.

➢ ***Các công thức :***

- $(C)' = 0$; $(x)' = 1$
- $\left(x^n\right)' = n.x^{n-1} \Rightarrow \left(u^n\right)' = n.u^{n-1}.u'$, $(n \in \mathbb{N}, n \ge 2)$
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x>0) \Rightarrow \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(u>0)$
- $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow (\sin u)' = u'.\cos u$
- $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow (\cos u)' = -u'.\sin u$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow (\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = \left(1 + \tan^2 u\right).u'$
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right) \Rightarrow (\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'\left(1 + \cot^2 u\right)$
- ***Chú ý :*** Ta có thể dùng định nghĩa để chứng minh thêm các công thức tính đạo hàm sau:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{u}\right)' = \frac{u'}{3.\sqrt[3]{u^2}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}} \Rightarrow \left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

2.2. *Các ví dụ minh họa :*

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$; b) $y = (x^3 - 2)(1 - x^2)$.

Lời giải

a) $y' = 2\left(x^4\right)' - \frac{1}{3}\left(x^3\right)' + 2\left(\sqrt{x}\right)' - (5)' = 8x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) $y' = (x^3 - 2)'.(1 - x^2) + (1 - x^2)'.(x^3 - 2)$

$= 3x^2(1 - x^2) - 2x(x^3 - 2) = -5x^4 + 3x^2 + 4x = x\left(-5x^3 + 3x + 4\right)$

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \frac{2x+1}{1-3x}$; b) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$; c) $y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$.

Lời giải

a) $y' = \frac{(2x+1)'(1-3x) - (1-3x)'(2x+1)}{(1-3x)^2} = \frac{2(1-3x) + 3(2x+1)}{(1-3x)^2} = \frac{5}{(1-3x)^2}$.

➢ ***Chú ý:*** Ta có thể chứng minh được công thức tổng quát sau

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{a.d - b.c}{(cx+d)^2} \quad ; (a, b, c, d \text{ là hằng số}) .$$

b) $y' = \frac{\left(x^2 - 3x + 3\right)'(x-1) - (x-1)'\left(x^2 - 3x + 3\right)}{(x-1)^2}$

$= \frac{(2x-3)(x-1) - \left(x^2 - 3x + 3\right)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

c) $y' = \frac{\left(1 + x - x^2\right)'\left(1 - x + x^2\right) - \left(1 - x + x^2\right)'\left(1 + x - x^2\right)}{\left(1 - x + x^2\right)^2}$

$= \frac{(1-2x)\left(1 - x + x^2\right) - (-1 + 2x)\left(1 + x - x^2\right)}{\left(1 - x + x^2\right)^2} = \frac{-4x + 2}{\left(1 - x + x^2\right)^2}$.

➢ ***Chú ý :*** Ta có thể chứng minh được các công thức tổng quát sau

- $\left(\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)^2}$

  (a, b, c, a_1, b_1, c_1 là hằng số).

- $\left(\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1}\right)' = \frac{a.a_1x^2 + 2a.b_1x + \begin{vmatrix} b & c \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x + b_1)^2}$

  (a, b, c, a_1, b_1 là hằng số) .

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (x^2 + x + 1)^4$; b) $y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$; c) $y = \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2}$.

Lời giải

a) $y' = 4(x^2 + x + 1)^3 \cdot (x^2 + x + 1)' = 4(x^2 + x + 1)^3(2x + 1)$.

b) $y' = \frac{\left[(x+1)^2\right]'(x-1)^3 - \left[(x-1)^3\right]'(x+1)^2}{(x-1)^6}$

$= \frac{2(x+1)(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)^6} = \frac{(x+1)(-x-5)}{(x-1)^4}$

c) $y' = -\frac{\left[(x^2 - 2x + 5)^2\right]'}{(x^2 - 2x + 5)^4} = -\frac{2(x^2 - 2x + 5)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 5)^4} = -\frac{4(x-1)}{(x^2 - 2x + 5)^3}$.

Ví dụ 4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$; b) $y = (x-2)\sqrt{x^2 + 3}$; c) $y = \left(1 + \sqrt{1 - 2x}\right)^3$.

Lời giải

a) $y' = \frac{\left(2x^2 - 5x + 2\right)'}{2\sqrt{2x^2 - 5x + 2}} = \frac{4x - 5}{2\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}$.

b) $y' = (x-2)'.\sqrt{x^2 + 3} + \left(\sqrt{x^2 + 3}\right)'.(x - 2)$

$= \sqrt{x^2 + 3} + \frac{\left(x^2 + 3\right)'}{2\sqrt{x^2 + 3}} \cdot (x - 2) = \frac{2\left(x^2 + 3\right) + 2x(x - 2)}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{2x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3}}$

c) $y' = 3\left(1 + \sqrt{1 - 2x}\right)^2 \cdot \left(1 + \sqrt{1 - 2x}\right)' = 3\left(1 + \sqrt{1 - 2x}\right)^2 \cdot \frac{(1 - 2x)'}{2\sqrt{1 - 2x}}$

$$=3\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2\cdot\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}=-\frac{3\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2}{\sqrt{1-2x}}.$$

Ví dụ 5. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=2\sin 3x\cos 5x$; b) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; c) $y=\dfrac{1+\tan^2 3x}{1-\tan^2 3x}$.

Lời giải

a) $y'=2\left[(\sin 3x)'\cos 5x+\sin 3x(\cos 5x)'\right]$

$$=2\left[\cos 3x.(3x)'.\cos 5x-\sin 3x.\sin 5x.(5x)'\right]$$

$$=2(3\cos 3x.\cos 5x-5\sin 3x.\sin 5x)$$

$$=3\cos 8x+3\cos 2x-5\cos 2x+5\cos 8x=2(4\cos 8x-\cos 2x).$$

Cách khác : $y=2\sin 3x\cos 5x=\sin 8x-\sin 2x$

$$\Rightarrow y'=(8x)'.\cos 8x-(2x)'\cos 2x=8\cos 8x-2\cos 2x.$$

b) $y'=\dfrac{(\sin x+\cos x)'.(\sin x-\cos x)-(\sin x-\cos x)'.(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}$

$$=\frac{(\cos x-\sin x).(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x).(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{-2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{(\sin x-\cos x)^2}=\frac{-2}{\left[\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}=\frac{-1}{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Cách khác : $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow y'=\left[\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]'=-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)'}{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{-1}{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

c) $y=\dfrac{1+\tan^2 3x}{1-\tan^2 3x}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 3x}}{\dfrac{\cos^2 3x-\sin^2 3x}{\cos^2 3x}}=\dfrac{1}{\cos 6x}$

$$\Rightarrow y'=\left(\frac{1}{\cos 6x}\right)'=-\frac{(\cos 6x)'}{\cos^2 6x}=\frac{6.\sin 6x}{\cos^2 6x}.$$

- ***Chú ý:*** *Khi gặp các hàm số phức tạp nếu có thể ta hãy rút gọn hàm số rồi hãy đi tính đạo hàm, đặc biệt là đối với các hàm số có chứa các hàm số lượng giác.*

Ví dụ 6. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=(\sin x+\cos x)^2$; b) $y=\sqrt{\tan x+\cot x}$;

c) $y=\tan 2x+\dfrac{2}{3}\tan^3 2x+\dfrac{1}{5}\tan^5 2x$; d) $y=\tan^2\left[\sin\left(\cos^3 2x\right)\right]$.

Lời giải

a) $y=(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x\Rightarrow y'=2.\cos 2x$.

b) $y'=\left(\sqrt{\tan x+\cot x}\right)'=\dfrac{(\tan x+\cot x)'}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}=\dfrac{\tan^2 x-\cot^2 x}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}$.

c) $y'=(\tan 2x)'+2\tan^2 2x.(\tan 2x)'+\tan^4 2x.(\tan 2x)'$

$$=(\tan 2x)'\left(1+2\tan^2 2x+\tan^4 2x\right)$$

$$=(2x)'\left(1+\tan^2 2x\right)\left(1+2\tan^2 2x+\tan^4 2x\right)$$

$$=2\left(1+\tan^2 2x\right)\left(1+2\tan^2 2x+\tan^4 2x\right)=2\left(1+\tan^2 2x\right)^3.$$

d) $y'=2\tan\left[\sin\left(\cos^3 2x\right)\right].\left\{\tan\left[\sin\left(\cos^3 2x\right)\right]\right\}'$

$$=2\tan\left[\sin\left(\cos^3 2x\right)\right].\frac{1}{\cos^2\left[\sin\left(\cos^3 2x\right)\right]}.\left[\sin\left(\cos^3 2x\right)\right]'$$

Mà : $+\left[\sin\left(\cos^3 2x\right)\right]'=\cos\left(\cos^3 2x\right).\left(\cos^3 2x\right)'$

$$+\left(\cos^3 2x\right)'=3\cos^2 2x.(\cos 2x)'=-6\cos^2 2x.\sin 2x$$

Vậy : $y'=\dfrac{-12\tan\left[\sin\left(\cos^3 2x\right)\right]}{\cos^2\left[\sin\left(\cos^3 2x\right)\right]}.\cos\left(\cos^3 2x\right).\cos^2 2x.\sin 2x$.

Ví dụ 7. Cho hàm số : $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+mx+5$. Tìm m để :

a) $f'(x)\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$; b) $f'(x)>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$;

c) $f'(x)<0,\ \forall x\in(0;2)$; d) $f'(x)>0,\ \forall x\in(-\infty;2]$.

Lời giải

Ta có : $y'=f'(x)=x^2-4x+m$

a) $f'(x)=x^2-4x+m\ge 0 \Leftrightarrow \Delta'=4-m\le 0 \Leftrightarrow m\ge 4$.

b) $f'(x)=x^2-4x+m>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\Delta'=0\\ \dfrac{S}{2}<0\end{cases}\\ \Delta'<0\\ \begin{cases}\Delta'>0\\ P\ge 0\\ S<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}4-m=0\\ 2<0\end{cases}\\ 4-m<0\\ \begin{cases}4-m>0\\ m\ge 0\\ 4<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\in\varnothing\\ m>4\\ m\in\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow m>4 .$$

c) $f'(x)=x^2-4x+m<0,\ \forall x\in(0;2)$

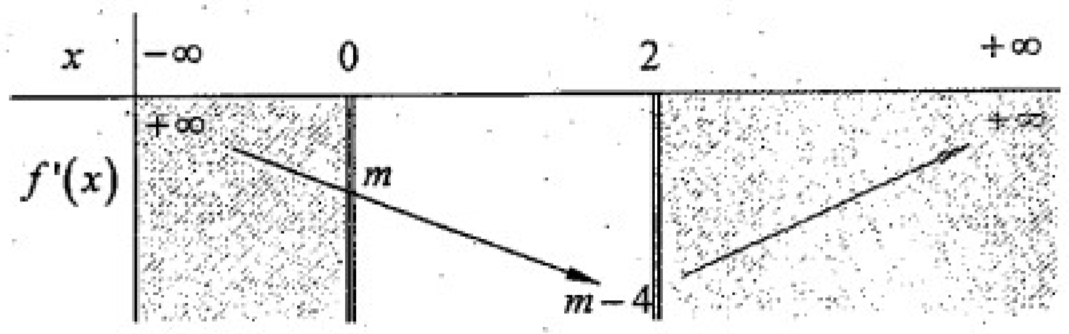
$$\Leftrightarrow (0;2)\subset[x_1;x_2] \Leftrightarrow \begin{cases}f(0)=m\le 0\\ f(2)=m-4\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\le 0\\ m\le 4\end{cases} \Leftrightarrow m\le 0 .$$

d) $f'(x)>0,\ \forall x\in(-\infty;2] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\Delta'=0\\ \dfrac{S}{2}>2\end{cases}\\ \Delta'<0\\ \begin{cases}\Delta'>0\\ 2\le x_1<x_2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}4-m=0\\ 2>2\end{cases}\\ 4-m<0\\ \begin{cases}4-m>0\\ f(2)=m-4>0\\ S/2=2>2\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\in\varnothing\\ m>4\\ m\in\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow m>4 .$$

Cách khác :

Xét hàm số : $f'(x)=x^2-4x+m$, lập bảng biến thiên của hàm số



Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

a) $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m-4\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 4$.

b) $f'(x)>0,\ \forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow m-4>0 \Leftrightarrow m>4$.

c) $f'(x)\le 0,\ \forall x\in(0;2) \Leftrightarrow m\le 0$.

d) $f'(x)>0,\ \forall x\in(-\infty;2] \Leftrightarrow m-4>0 \Leftrightarrow m>4$.

- ***Chú ý:*** *Khi gặp các bài toán tìm các giá trị của tham số để một tam thức bậc 2 luôn âm hay luôn dương trên một miền nào đó, ngoài cách vận dụng định lí về dấu tam thức bậc hai ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai rồi dựa vào bảng biến thiên để suy ra kết quả.*

Ví dụ 8. Cho hàm số : $f(x)=\dfrac{m}{3}x^3-\dfrac{m}{2}x^2+(4-m)x+5m+1$. Tìm m để :

a) $f'(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$; b) $f'(x)=0$ có hai nghiệm cùng dấu.

Lời giải

Ta có : $f'(x)=mx^2-mx+(4-m),\ \forall x\in\mathbb{R}$

a) $f'(x)=mx^2-mx+(4-m)<0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=m<0\\ \Delta=m^2-4m(4-m)<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m<0\\ 5m^2-16m<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<0\\ m<0\vee m>\dfrac{16}{5}\end{cases} \Leftrightarrow m<0 .$$

b) $f'(x)=0$ có hai nghiệm cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=m\ne 0\\ \Delta=m^2-4m(4-m)>0\\ P=\dfrac{4-m}{m}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\ne 0\\ 0<m<\dfrac{16}{5}\\ 0<m<4\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<\dfrac{16}{5} .$$

2.3. Bài tập áp dụng:

Bài 6. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1}{2}x^5+\dfrac{2}{3}x^4-x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x-5$; b) $y=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}x+x^2-0,5x^4$;

c) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x$; d) $y=x^5-4x^3+2x-3\sqrt{x}$;

e) $y=\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x^2}+c\sqrt{x}+\dfrac{a^2}{2}-\sqrt[3]{b}$ (a, b, c là hằng số) .

Bài 7. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=(2x-3)(x^5-2x)$; b) $y=x(2x-1)(3x+2)$;

c) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$; d) $y=\frac{2x-1}{x-1}$;

e) $y=\frac{3}{2x-5}$; f) $y=\frac{x^2+x-1}{x-1}$;

g) $y=\frac{2x^2-4x+5}{2x+1}$; h) $y=x+1-\frac{2}{x+1}$;

i) $y=\frac{5x-3}{x^2+x+1}$; k) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Bài 8. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=(2x^3-3x^2-6x+1)^2$; b) $y=\frac{1}{(x^2-x+1)^5}$

c) $y=(x^2-x+1)^3(x^2+x+1)^2$; d) $y=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$;

e) $y=\sqrt{1+2x-x^2}$; f) $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}$;

g) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; h) $y=\sqrt[3]{x^3-3x+1}$;

i) $y=\sqrt[3]{\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^2}$; k) $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5$.

Bài 9. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$; b) $y=\frac{\sin^3 2x-\cos^3 2x}{\sin 2x-\cos 2x}$;

c) $y=\frac{\sin 2x+\cos 2x}{2\sin 2x-\cos 2x}$; d) $y=4\sin x\cos 5x.\sin 6x$;

e) $y=\frac{\sin^3 2x+\cos^3 2x}{1-\sin 2x.\cos 2x}$; f) $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x-x\sin x}$;

g) $y=\tan\frac{x+1}{2}$; h) $y=\tan 3x-\cot 3x$;

i) $y=\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$; k) $y=\cot\sqrt{x^2+1}$;

l) $y=\cos^4 x+\sin^4 x$; m) $y=(\sin x+\cos x)^3$;

n) $y=\sin^3 2x\cos^3 2x$; o) $y=\sin(\cos 3x)$;

p) $y=\sin^2\left[\cos^2(\cos 3x)\right]$; q) $y=\cot^5\left[\cos^2\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\right]$.

Bài 10. a) Cho hàm số $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$. Tính: $f'(0)+f'(\pi)-8f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Cho hàm số $y=f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$. Chứng minh: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$

Bài 11. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)$;

b) $y=\cos^4 x\left(2\cos^2 x-3\right)+\sin^4 x\left(2\sin^2 x-3\right)$;

c) $y=3\left(\sin^8 x-\cos^8 x\right)+4\left(\cos^6 x-2\sin^6 x\right)+6\sin^4 x$;

d) $y=\frac{\sin^4 x+3\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x+3\cos^4 x-1}$;

e) $y=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$;

f) $y=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).(1+\sin x)}{\sin x}$;

g) $y=\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}$;

h) $y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}}$, $\left(x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Bài 12. Cho hàm số $y=x\sin x$ chứng minh :

a) $xy-2(y'-\sin x)+x(2\cos x-y)=0$; b) $\frac{y'}{\cos x}-x=\tan x$.

Bài 13. Cho các hàm số : $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, $g(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$. Chứng minh : $3f'(x)-2g'(x)=0$.

Bài 14. a) Cho hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh : $2\sqrt{1+x^2}.y'=y$.

b) Cho hàm số $y=\cot 2x$. Chứng minh : $y'+2y^2+2=0$.

Bài 15. Giải phương trình $y'=0$ biết :

a) $y=\sin 2x-2\cos x$; b) $y=\cos^2 x+\sin x$;

c) $y=3\sin 2x+4\cos 2x+10x$; d) $y=(m-1)\sin 2x+2\cos 2x-2mx$.

Bài 16. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2+m^2x-4$. Tìm m để :

a) $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt ;

b) y' có thể viết được thành bình phương của nhị thức ;

c) $y'\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

d) $y'<0$, $\forall x\in(1;2)$;

e) $y'>0$, $\forall x>0$.

Bài 17. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2-mx+3$. Xác định m để :

a) $y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng âm ;

c) $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện : $x_1^2+x_2^2=3$.

Bài 18. Cho hàm số $y=\frac{mx^2+6x-2}{x+2}$.

Xác định m để hàm số có $y'\le 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$.

Bài 19. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y=x^3+3x^2+mx+m$ có $y'\le 0$ trên một đoạn có độ dài bằng 1 .

Bài 20. Cho hàm số $y=mx^4+(m^2-9)x^2+10$ (1) (m laø tham soá). Xác định m để hàm số có $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt .

Bài 21. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-m$ (1) (m laø tham soá). Tìm m để $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho : $|x_1-x_2|\le 2$.

3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong

3.1. *Phương pháp:*

➢ ***Khi biết tiếp điểm:*** Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ tại $M(x_0;y_0)$, có phương trình là: $y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0$ (1).

➢ ***Khi biết hệ số góc của tiếp tuyến:*** Nếu tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ có hệ số góc là k thì ta gọi $M_0(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow f'(x_0)=k$ (1)

- Giải phương trình (1) tìm x_0 suy ra $y_0=f(x_0)$
- Phương trình tiếp tuyến phải tìm có dạng : $y=k(x-x_0)+y_0$

❖ ***Chú ý :***

- *Hệ số góc của tiếp tuyến tại* $M(x_0,y_0)\in(C)$ *là* $k=f'(x_0)=\tan\alpha$ *Trong đó* α *là góc giữa chiều dương của trục hoành và tiếp tuyến .*
- *Hai đường thẳng song song với nhau thì hệ số góc của chúng bằng nhau .*
- *Hai đường thẳng vuông góc nếu tích hệ số góc của chúng bằng* -1 .

➢ ***Biết tiếp tuyến đi qua điểm*** $A(x_1;y_1)$:

- Viết phương trình tiếp tuyến của $y=f(x)$ tại $M_0(x_0;y_0)$:

$$y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0 \quad (1)$$

- Vì tiếp tuyến đi qua $A(x_1;y_1)\Rightarrow y_1=f'(x_0).(x_1-x_0)+f(x_0)$ (*)
- Giải phương trình (*) tìm x_0 thế vào (1) suy ra phương trình tiếp tuyến .

3.2. *Các ví dụ minh họa:*

Ví dụ 1. Cho đường cong $(C): y=f(x)=x^3-3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong các trường hợp sau :

a) Tại điểm $M_0(1;-2)$;

b) Tại điểm thuộc (C) và có hoành độ $x_0=-1$;

c) Tại giao điểm của (C) với trục hoành .

d) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;-4)$.

Lời giải

a) Ta có : $f'(x)=3x^2-6x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Do $x_0=1\Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=-3$

Nên tiếp tuyến cần tìm có phương trình : $y=-3(x-1)-2=-3x+1$.

b) Do $x_0=-1\Rightarrow y_0=-4$; $f'(x_0)=f'(-1)=9$

Nên tiếp tuyến cần tìm có phương trình : $y=9(x+1)-4=9x+5$.

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành là :

$$x^3-3x^2=0\Leftrightarrow x^2(x-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$$

Vậy (C) cắt trục hoành tại hai điểm : $O(0;0)$; $M(3;0)$

Phương trình tiếp tuyến tại $O(0;0)$: $y=0(x-0)+0\Leftrightarrow y=0$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(3;0)$: $y=9(x-3)+0\Leftrightarrow y=9x-27$.

d) Ta biết phương trình tiếp tuyến của $(C): y=f(x)=x^3-3x^2$ tại $M_0(x_0;y_0)$ là : $y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0$

$$\Leftrightarrow y=(3x_0^2-6x_0).(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2 \quad (\Delta)$$

Vì tiếp tuyến (Δ) đi qua điểm $A(-1;-4)$

$$\Rightarrow -4=(3x_0^2-6x_0).(-1-x_0)+x_0^3-3x_0^2$$

$$\Leftrightarrow 3x_0(x_0+1)(x_0-2)-(x_0^3-3x_0^2+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)(3x_0^2-6x_0)-(x_0+1)(x_0^2-4x_0+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)(2x_0^2-2x_0-4)=0\Leftrightarrow 2(x_0+1)^2(x_0-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=2\end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán :

$(\Delta_1): y=9(x+1)-4\Leftrightarrow y=9x+5$;

$(\Delta_2): y=0(x+1)-4\Leftrightarrow y=-4$.

Ví dụ 2. Cho đường cong $(C): y=\frac{3x+1}{1-x}$

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): x-4y-21=0$;

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 2x+2y-9=0$;

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng : $x-2y+5=0$ một góc 30^0.

Lời giải

Ta có : $y'=\dfrac{4}{(1-x)^2}, \forall x \neq 1$

a) Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng:

$$(d): x-4y-21=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{21}{4}$$

Nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=\dfrac{1}{4}$, gọi $M_0(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

$$\Rightarrow f'(x_0)=k \Leftrightarrow \frac{4}{(1-x_0)^2}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1-x_0)^2=16 \Leftrightarrow 1-x_0=\pm 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-3 \Rightarrow y_0=-2 \\ x_0=5 \Rightarrow y_0=-4 \end{array}\right.$$

Có hai tiếp tuyến có hệ số góc: $k=\dfrac{1}{4}$

$$(d_1): y=\frac{1}{4}(x+3)-2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4};$$

$$(d_2): y=\frac{1}{4}(x-5)-4 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{21}{4} \text{ loại do trùng với } (d).$$

Vậy chỉ có một tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán : $(d_1): y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$

b) Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng:

$$(\Delta): 2x+2y-9=0 \Leftrightarrow y=-x+\frac{9}{2}$$

Nên nếu hệ số góc của tiếp tuyến là k thì $k.(-1)=-1 \Leftrightarrow k=1$

Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

$$\Rightarrow f'(x_0)=k=1 \Leftrightarrow \frac{4}{(1-x_0)^2}=1 \Leftrightarrow (1-x_0)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \Rightarrow y_0=-1 \\ x_0=3 \Rightarrow y_0=-5 \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán :

$$(\Delta_1): y=1(x+1)-1 \Leftrightarrow y=x;$$

$$(\Delta_2): y=1(x-3)-5 \Leftrightarrow y=x-8.$$

c) Vì tiếp tuyến tạo với đường thẳng :

$$x-\sqrt{3}y+5=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{\sqrt{3}} \text{ một góc } 30^0$$

Nên nếu hệ số góc của tiếp tuyến là k thì :

$$\tan 30^0=\left|\frac{k-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}k}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{3}.k-1}{\sqrt{3}+k}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{3}.k-1}{\sqrt{3}+k}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{3}.k-1}{\sqrt{3}+k}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\sqrt{3} \\ k=0 \end{array}\right.$$

Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

$$\Rightarrow f'(x_0)=k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{4}{(1-x_0)^2}=\sqrt{3} \\ \dfrac{4}{(1-x_0)^2}=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (1-x_0)^2=\frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1-\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}} \Rightarrow y_0=2\sqrt[4]{3}-3 \\ x_0=1+\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}} \Rightarrow y_0=-2\sqrt[4]{3}-3 \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán :

$$(D_1): y=\sqrt{3}\left(x-1+\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\right)+2\sqrt[4]{3}-3=\sqrt{3}x+4\sqrt[4]{3}-3-\sqrt{3};$$

$$(D_2): y=\sqrt{3}\left(x-1-\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\right)-2\sqrt[4]{3}-3=\sqrt{3}x-4\sqrt[4]{3}-3-\sqrt{3}.$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+5$ (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2+6x-9$

Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0) \in (C)$ có hệ số góc:

$$k=y'(x_0)=3x_0^2+6x_0-9=3(x_0+1)^2-12 \geq -12$$

$\Rightarrow$ Mink $=-12$, đạt được khi: $x_0=-1 \Rightarrow y_0=16$

Vậy trong tất cả các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến tại $M(-1;16)$ có hệ số góc nhỏ nhất. Phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng:

$$y=-12(x+1)+16 \Leftrightarrow y=-12x+4.$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt *A, B* và tam giác *OAB* cân tại gốc tọa độ *O*.

(Khối A – 2009).

Lời giải

Tam giác OAB cân tại O nên tiếp tuyến tạo với trục Ox một góc 45^0, nên tiếp tuyến có hệ số góc $k=\pm 1$, nếu gọi $M(x_0\,;y_0)$ là tiếp điểm thì :

$$y'(x_0)=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{(2x_0+3)^2}=-1 \\ -\dfrac{1}{(2x_0+3)^2}=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2x_0+3)^2=1 \\ (2x_0+3)^2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \Rightarrow y_0=1 \\ x_0=-2 \Rightarrow y_0=0 \end{array}\right.$$

+ Khi $x_0=-1 \Rightarrow (\Delta_1): y=-1.(x+1)+1=-x$, (loại do trùng với $y=-x$).

+ Khi $x_0=-2 \Rightarrow (\Delta_2): y=-1.(x+2)=-x-2$ (nhận).

Vậy tiếp tuyến cần tìm là : $y=-x-2$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ (C). Tìm các điểm thuộc đồ thị (C) mà qua đó kẻ được một và chỉ một tiếp tuyến với đồ thị (C).

(Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, 1999)

Lời giải

Gọi $M_1(x_1;y_1)\in(C) \Leftrightarrow y_1=-x_1^3+3x_1^2-2$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M_0(x_0;y_0)\in(C)$ có dạng:

$$y=\left(-3x_0^2+6x_0\right)(x-x_0)-x_0^3+3x_0^2-2 \qquad (\Delta)$$

(Δ) đi qua $M_1(x_1;y_1)$

$$\Leftrightarrow -x_1^3+3x_1^2-2=\left(-3x_0^2+6x_0\right)(x_1-x_0)-x_0^3+3x_0^2-2$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3-3(x_1+1)x_0^2+6x_1x+x_1^3-3x_1^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x_0-x_1)^2(2x_0+x_1-3)=0 \ (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=x_1 \\ x_0=\dfrac{3-x_1}{2} \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có một nghiệm x_0 duy nhất

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{3-x_1}{2} \Leftrightarrow x_1=1$$

Vậy, trên (C) chỉ có duy nhất một điểm là $M(1;0)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y=\sqrt{6x-x^2}$. Chứng minh tiếp tuyến tại một điểm bất kì của (C) cắt trục tung tại một điểm cách đều gốc tọa độ và tiếp điểm.

Lời giải

Ta biết tiếp tuyến tại một điểm $M_0\left(x_0\,;\sqrt{6x_0-x_0^2}\right)\in(C)$ là :

$$(\Delta): y=\frac{3-x_0}{\sqrt{6x_0-x_0^2}}\cdot(x-x_0)+\sqrt{6x_0-x_0^2}\ , \ (0<x_0<6)$$

$(\Delta)\cap Oy=A(0\,;y_A)$ với :

$$y_A=\frac{3-x_0}{\sqrt{6x_0-x_0^2}}\cdot(0-x_0)+\sqrt{6x_0-x_0^2}=\frac{3x_0}{\sqrt{6x_0-x_0^2}}>0\,,\ (\text{do } 0<x_0<6)$$

$$\text{Mà } d(A,M_0)=\sqrt{(x_0-0)^2+\left(\frac{3x_0}{\sqrt{6x_0-x_0^2}}-\sqrt{6x_0-x_0^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{x_0^2-3x_0}{\sqrt{6x_0-x_0^2}}\right)^2}=\sqrt{x_0^2+\frac{\left(x_0^2-3x_0\right)^2}{6x_0-x_0^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{6x_0^3-x_0^4+x_0^4-6x_0^3+9x_0^2}{6x_0-x_0^2}}=\sqrt{\frac{9x_0^2}{6x_0-x_0^2}}$$

$$=\frac{3x_0}{\sqrt{6x_0-x_0^2}}=y_A=d(A,O).$$

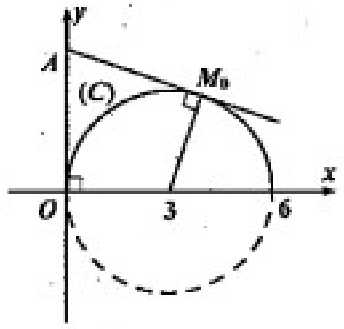
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Cách khác : Ta có :

$$y=\sqrt{6x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2=6x-x^2\ ,(y\ge 0\,,0\le x\le 6)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=9\ ,(y\ge 0\,,0\le x\le 6)$$



Vậy (C) là phần của đường tròn $(x-3)^2+y^2=9$ nằm ở góc phần tư thứ nhất

Ta thấy đường tròn (C) tiếp xúc với Oy tại O. Do đó AO và AM_0 các là tiếp tuyến kẻ từ A đến đường tròn (C) nên theo tính chất của các tiếp tuyến thì $AO=AM_0$, suy ra điều phải chứng minh.

3.3. *Bài tập áp dụng:*

Bài 22. Cho hàm số $(C): y=x^2-2x+3$. Viết phương trình tiếp với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0=2$;

b) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng : $4x-y-9=0$;

c) Vuông góc với đường thẳng: $2x+4y-2011=0$;

d) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;1)$.

Bài 23. Cho hàm số : $y=\dfrac{3x+1}{1-x}$ (C) .

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1;-1)$;

b) Vết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành;

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung ;

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d):4x-y+1=0$;

e) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta):4x+y-8=0$.

Bài 24. Cho hàm số : $y=x^3-3x^2$ (C)

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $I(1;-2)$.

b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến khác của đồ thị (C) không đi qua I .

Bài 25. Cho hàm số $y=\sqrt{1-x-x^2}$ (C).Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{2}$;

b) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng : $(d):x+2y=0$.

Bài 26. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1$ (1) , m là tham số thực . Tìm các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm có hoành độ $x=-1$ đi qua điểm $A(1;2)$.*(Dự bị A₁ - 2008)*

Bài 27. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$ (1). Tính diện tích của tam giác tạo bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm $M(-2;5)$.

(Dự bị D₁ - 2008)

Bài 28. Cho hàm số $y=\sqrt{3}x^3+4$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $(d):\sqrt{3}y-x+6=0$ góc 30^0 .

Bài 29. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+9x-5$ (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

Bài 30. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (C) . Gọi $I(1;2)$. Tìm điểm $M\in(C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM .

(Dự bị B₂ - 2003)

Bài 31. (*) Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ (C). Tìm điểm $M\in(C)$, biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục tọa độ tại A, B và tam giác OAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$.

(Khối D - 2007)

Bài 32. (*) Cho hàm số : $y=\dfrac{x}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) sao cho (Δ) và hai đường $(d_1):x=1$; $(d_2):y=1$ cắt nhau tạo thành một tam giác cân..

(Dự bị D₂ - 2007)

Bài 33. Cho hàm số $y=x+\dfrac{1}{x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;-3)$.

Bài 34. (*) Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ (C). Qua điểm $A\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{4}{3}\right)$ có thể kẻ được mấy tiếp tuyến đến đồ thị (C). Viết phương trình các tiếp tuyến ấy .

Bài 35. (*) Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ (C). Gọi $I(-1;0)$.Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua điểm I . *(Dự bị B₂ - 2005).*

Bài 36. (*) Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết rằng khoảng cách từ $I(1;1)$ đến tiếp tuyến là lớn nhất .

4. Tìm vi phân của hàm số và tính gần đúng nhờ vi phân

4.1. Phương pháp : Dựa theo định nghĩa và công thức sau :

- Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ thì tích $f'(x).\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $y=f(x)$.

  Kí hiệu : $df(x)=f'(x).\Delta x=f'(x).dx$ hay $dy=y'.dx$

- Công thức tính gần đúng : $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$.

4.2. Các ví dụ minh họa :

Ví dụ 1. Tìm vi phân của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$; b) $y=\sqrt{(x^2+1)(2x^3-3x)}$.

Lời giải

a) $dy=\left(\dfrac{x^2-3x+5}{x-1}\right)'\cdot dx=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}\cdot dx$

b) $dy=\left(\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(2x^3-3x\right)}\right)'\cdot dx=\dfrac{\left[\left(x^2+1\right)\left(2x^3-3x\right)\right]'}{2\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(2x^3-3x\right)}}\cdot dx$

$$=\frac{2x\left(2x^3-3x\right)+\left(6x^2-3\right)\left(x^2+1\right)}{2\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(2x^3-3x\right)}}\cdot dx=\frac{10x^4-3x^2-3}{2\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(2x^3-3x\right)}}\cdot dx.$$

Ví dụ 2. Tìm vi phân của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$; b) $y=\tan^3 x-\dfrac{1}{2}\cot^2 3x$;

Lời giải

a) $dy=\left(\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}\right)'\cdot dx=\dfrac{\left(x.\cos x-\sin x\right)\left(\sin^2 x-x^2\right)}{x^2\sin^2 x}\cdot dx$

b) $dy=\left(\tan^3 x-\dfrac{1}{2}\cot^2 3x\right)'\cdot dx=\left[3\tan^2 x\left(\tan x\right)'-\cot 3x.\left(\cot 3x\right)'\right]\cdot dx$

$$=\left[3\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)+3\cot 3x.\left(1+\cot^2 3x\right)\right]\cdot dx.$$

Ví dụ 3. Tính gần đúng các giá trị sau (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả) :

a) $\sqrt{8,99}$; b) $\cos 46^0$; c) $\tan 59^0 45'$.

Lời giải

a) $\sqrt{8,99}=\sqrt{9+(-0,01)}$

Xét $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow\sqrt{9+(-0,01)}=f(9-0,01)\approx f(9)+f'(9)\cdot(-0,01)$$

$$\approx\sqrt{9}+\frac{1}{2\sqrt{9}}\cdot(-0,01)\approx 3-\frac{0,01}{6}\approx 2,9983.$$

b) Xét $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$

$$\Rightarrow\cos 46^0=\cos\left(45^0+1^0\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\approx\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right)\approx\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3,1416}{180}\approx 0,6947.$$

c) Xét $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$

$$\Rightarrow\tan 59^0 45'=\tan\left(60^0-15'\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4.180}\right)$$

$$\approx\tan\frac{\pi}{3}-\left(1+\tan^2\frac{\pi}{3}\right)\frac{\pi}{720}\approx\sqrt{3}-(1+3)\frac{\pi}{720}\approx\sqrt{3}-\frac{3,1416}{180}\approx 1,7146.$$

4.3. Bài tập áp dụng:

Bài 37. Tìm vi phân của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$; b) $y=(x-x^2)^{32}$;

c) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$; d) $y=\left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right)^2$;

e) $y=\cot^3(2x+\dfrac{\pi}{4})$; f) $y=\sin(\cos x)+\cos(\sin x)$.

Bài 38. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x-\cos^3 x}{1+\sin x.\cos x}$. Chứng minh : $y.dy+\cos 2x.dx=0$.

Bài 39. Tính gần đúng các giá trị sau (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả) :

a) $\sqrt{4,02}$; b) $\tan 44^0 30'$; c) $\sqrt[3]{7,97}$.

5. Đạo hàm cấp cao

5.1. Phương pháp:

➢ Dựa theo các định nghĩa sau :

- ***Đạo hàm cấp 2:*** $f''(x)=\left[f'(x)\right]'$
- ***Đạo hàm cấp cao:*** $f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$, $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$.

➢ ***Chú ý :***

Để tìm công thức tính đạo hàm cấp n của một hàm số ta tìm đạo hàm cấp 1, 2 , 3 ... sau đó dự đoán công thức tính đạo hàm cấp n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

5.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm các cấp đã chỉ ra của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+5x^2-4x+7$. Tìm y'', y''' ;

b) $y=\dfrac{x-3}{x+4}$. Tìm y'', y''', $y^{(4)}$;

c) $y=\sqrt{3x-x^3}$. Tìm y'' .

Lời giải

a) $y'=x^3-2x^2+10x-4\Rightarrow y''=3x^2-4x+10$; $y'''=6x-4$.

b) $y'=\dfrac{7}{(x+4)^2}\Rightarrow y''=-\dfrac{14}{(x+4)^3}$; $y'''=\dfrac{42}{(x+4)^4}$; $y^{(4)}=-\dfrac{168}{(x+4)^5}$.

c) $y'=\dfrac{3-3x^2}{2\sqrt{3x-x^3}}\Rightarrow y''=\dfrac{3\left(x^4-6x^2-3\right)}{4\sqrt{\left(3x-x^3\right)^3}}$.

Ví dụ 2. Chứng minh các hệ thức sau với các hàm số được chỉ ra:

a) $y^3y''+1=0$ khi $y=\sqrt{2x-x^2}$;

b) $x^2y''-2\left(x^2+y^2\right)(1+y)=0$ khi $y=x.\tan x$.

Lời giải

a) Do : $y=\sqrt{2x-x^2}$

$$\Rightarrow y'=\frac{\left(2x-x^2\right)'}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{y}$$

$$\Leftrightarrow y'.y=1-x\Leftrightarrow y''y+y'^2=-1\Leftrightarrow y^3y''+y^2y'^2+y^2=0$$

$$\Leftrightarrow y^3y''+(1-x)^2+2x-x^2=0\Leftrightarrow y^3y''+1-2x+x^2+2x-x^2=0.$$

Tức là : $y^3y''+1=0$ (đpcm).

b) Do : $y=x.\tan x\Rightarrow y'=\tan x+x\left(1+\tan^2x\right)$

$$\Rightarrow y''=1+\tan^2x+1+\tan^2x+2x.\tan x\left(1+\tan^2x\right)$$

$$=2\left(1+\tan^2x\right)(1+x.\tan x)$$

$$\Rightarrow x^2y''=2\left(x^2+x^2.\tan^2x\right)(1+x.\tan x)=2\left(x^2+y^2\right)(1+y)$$

Tức là : $x^2y''-2\left(x^2+y^2\right)(1+y)=0$ (đpcm).

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm cấp n, $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ của các hàm số sau :

a) $y=\sin(ax+b)$; b) $y=\cos(ax+b)$; c) $y=\dfrac{1}{ax+b}$.

Lời giải

a) Ta có :

$$y'=(ax+b)'.\cos(ax+b)=a.\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=a\cdot\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)'\cdot\cos\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)=a^2\cdot\sin\left(ax+b+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=a^2\cdot\left(ax+b+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)'\cdot\cos\left(ax+b+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=a^3\cdot\sin\left(ax+b+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$y^{(n)}=a^n\cdot\sin\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad(1)$$

Chứng minh: $\left[\sin(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right),\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ (1)

+ Khi $n=1\Rightarrow\left[\sin(ax+b)\right]'=a.\cos(ax+b)=a^1.\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$, vậy (1) đúng.

+ Giả sử (1) đúng khi $n=k,(k\ge1)$, tức là, ta có:

$$\left[\sin(ax+b)\right]^{(k)}=a^k\sin\left(ax+b+\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\left[\sin(ax+b)\right]^{(k+1)}=\left[a^k\sin\left(ax+b+\frac{k\pi}{2}\right)\right]'$$

$$=a^k.\cos\left(ax+b+\frac{k\pi}{2}\right).\left(ax+b+\frac{k\pi}{2}\right)'=a^k.a.\sin\left(ax+b+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=a^{k+1}\sin\left[ax+b+\frac{(k+1)\pi}{2}\right]$$

Tức là (1) đúng khi $n=k+1$.

Vậy : $\left[\sin(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right),\forall n$

***Chú ý :** Ta đã sử dụng công thức lượng giác sau :* $\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Ta có :

$$y'=-(ax+b)'.\sin(ax+b)=a.\cos\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=-a\cdot\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)'\cdot\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)=a^2\cdot\cos\left(ax+b+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=-a^2\cdot\left(ax+b+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)'\cdot\sin\left(ax+b+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=a^3\cdot\cos\left(ax+b+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$y^{(n)}=a^n\cdot\cos\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad(2)$$

Chứng minh tương tự trên

***Chú ý :** Ta đã sử dụng công thức lượng giác sau:* $-\sin\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Ta có :

$$y'=\frac{-(ax+b)'}{(ax+b)^2}=\frac{(-1)^1a^1.1}{(ax+b)^2}$$

$$y''=\left[\frac{(-1)^1a^1}{(ax+b)^2}\right]'=(-1)^1a^1\frac{-\left[(ax+b)^2\right]'}{(ax+b)^4}=\frac{(-1)^2a^2.1.2}{(ax+b)^3}$$

$$y'''=\left[\frac{(-1)^2a^2.1.2}{(ax+b)^3}\right]'=(-1)^2a^2.1.2\frac{-\left[(ax+b)^3\right]'}{(ax+b)^6}=\frac{(-1)^3a^3.1.2.3}{(ax+b)^4}$$

....

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^na^n.1.2.3....n}{(ax+b)^{n+1}}=\frac{(-1)^na^nn!}{(ax+b)^{n+1}}$$

Chứng minh : $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^na^nn!}{(ax+b)^{n+1}}$ (3)

+ Khi $n=1\Rightarrow\left(\frac{1}{ax+b}\right)'=-\frac{a}{(ax+b)^2}=\frac{(-1)^1.a^1.1!}{(ax+b)^{1+1}}$, vậy (3) đúng .

+ Giả sử (3) đúng khi $n=k$, $(k\ge 1)$, tức là , ta có :

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(k)}=\frac{(-1)^ka^kk!}{(ax+b)^{k+1}}\Rightarrow\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(k+1)}=\left[\frac{(-1)^ka^kk!}{(ax+b)^{k+1}}\right]'$$

$$=(-1)^ka^kk!\left[\frac{1}{(ax+b)^{k+1}}\right]'=(-1)^ka^kk!\left[\frac{(-1).(k+1).a}{(ax+b)^{k+2}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}(k+1)!}{(ax+b)^{k+2}}$$

Tức là (3) đúng khi $n=k+1$. Vậy : $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Ví dụ 4. Tìm các đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

a) $y=\frac{4x+1}{2x-1}$; b) $y=\frac{x^2-3x+5}{x+1}$.

Lời giải

a) $y=\frac{4x+1}{2x-1}=2+\frac{3}{2x-1}$;

Nên : $y^{(n)}=(2)^{(n)}+\left(\frac{3}{2x-1}\right)^{(n)}=0+3\cdot\frac{(-1)^n.2^n.n!}{(2x-1)^{n+1}}=\frac{(-1)^n.3.2^n.n!}{(2x-1)^{n+1}}$.

b) $y=\frac{x^2-3x+5}{x+1}=x-4+\frac{9}{x+1}$.

Nên : $y'=\left(x-4+\frac{9}{x+1}\right)'=1-\frac{9}{(x+1)^2}$

$$\Rightarrow y^{(n)}=(x-4)^{(n)}+\left(\frac{9}{x+1}\right)^{(n)}=0+9\cdot\frac{(-1)^n.n!}{(x+1)^{n+1}}=\frac{(-1)^n.9.n!}{(x+1)^{n+1}},\ \forall n\ge 2\ .$$

Ví dụ 5. Tìm các đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a) $y=\sin^4x+\cos^4x$; b) $y=8\sin x.\cos 3x.\cos 4x$.

Lời giải

a) Ta có : $y=\sin^4x+\cos^4x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$.

Nên : $y^{(n)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{(n)}+\frac{1}{4}(\cos 4x)^{(n)}$

$$=0+\frac{1}{4}\cdot 4^n.\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)=4^{n-1}.\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

b) $y=8\sin x.\cos 3x.\cos 4x=2(\sin 2x+\sin 6x+\sin 8x)$.

Nên : $y^{(n)}=2\left[(\sin 2x)^{(n)}+(\sin 6x)^{(n)}+(\sin 8x)^{(n)}\right]$

$$=2\left[2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+6^n\sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)+8^n\sin\left(8x+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

- ***Chú ý :*** *Khi tìm đạo hàm cấp* n *của một hàm số , nếu được ta hãy biến đổi hàm số đã cho thành tổng của các hàm số có một trong các dạng:* $\frac{1}{ax+b}$; $\sin ax$; $\cos ax$ *rồi áp dụng các công thức ở ví dụ trên , dự đoán ra công thức đạo hàm cấp* n *của hàm số đã cho và chứng minh lại bằng quy nạp (nếu cần) .*

5.3. ***Bài tập áp dụng:***

Bài 40. Tìm đạo hàm các cấp đã chỉ ra của các hàm số sau :

a) $y=x.\cos 3x$ tìm y'' ; b) $y=\sin^2 2x$ tìm y''' ;

c) $y=(2x+1)^5$ tìm $y^{(5)}$; d) $y=\frac{x^2+3x+1}{x-2}$ tìm $y^{(4)}$.

Bài 41. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $xy-2(y'-\sin x)+xy''=0$ nếu $y=x\sin x$;

b) $18(2y-1)+y''=0$ nếu $y=\cos^2 3x$;

c) $y''+y=0$ nếu $y=\frac{\sin^3x+\cos^3x}{1-\sin x\cos x}$;

d) $y^{(4)}+2xy'''-4y''-40=0$ nếu $y=(x^2-1)^2$;

e) $2y'^2=(y-1)y''$ nếu $y=\dfrac{x-3}{x+4}$;

f) $4(x^2+1).y''+4x.y'-y=0$ nếu $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$;

g) $(1+x^2)y''+xy'-k^2y=0$ nếu $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k$, $(k\in\mathbb{N})$.

Bài 42. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$; b) $y=\dfrac{3}{x^2-x-2}$;

c) $y=\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}$; d) $y=\dfrac{4x^2-5x+3}{2x^2-3x+1}$;

d) $y=4\sin x.\sin 2x.\sin 3x$; e) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$;

f) Cho $y=\cos 3x$. Chứng minh $y^{(2n)}=(-1)^n 3^{2n} y$.

6. Dùng định nghĩa đạo hàm tìm giới hạn

6.1. Phương pháp:

Ta có thể sử dụng định nghĩa của đạo hàm : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-x_0}$ để tính các giới hạn có dạng vô định . Bằng cách viết giới hạn cần tìm thành dạng : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-x_0}$, sau đó tính đạo hàm của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 rồi áp dụng định nghĩa đạo hàm suy ra kết quả của giới hạn .

6.2. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$

Đặt : $f(x)=\sqrt[3]{1+4x}\Rightarrow f(0)=\sqrt[3]{1+4.0}=1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

Mà $f'(x)=\left(\sqrt[3]{1+4x}\right)'=\dfrac{4}{3\cdot\sqrt[3]{(1+4x)^2}}\Rightarrow f'(0)=\dfrac{4}{3}$.

Vậy : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}=\dfrac{4}{3}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}$

Đặt $f(x)=\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}\Rightarrow f(1)=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

Mà : $f'(x)=\left(\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}\right)'=\dfrac{-3x^2}{2\sqrt{5-x^3}}-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+7)^2}}$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{-3}{4}-\frac{2}{12}=-\frac{11}{12}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x-1}=-\frac{11}{12}$$

Mặt khác : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$. Vậy : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=-\dfrac{11}{24}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

Nếu đặt $f(x)=x+x^2+\cdots+x^n$

$$\Rightarrow f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}\Rightarrow f'(1)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Vậy : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^n-1)-n(x-1)}{(x-1)^2}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

Nếu đặt $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$

$$\Rightarrow f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}$$

$$\Rightarrow f'(1)=1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

Vậy : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x.\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1-\sqrt{2}\sin x}$.

Lời giải

a) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x.\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cot 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\dfrac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-0}{x-\frac{\pi}{4}}}{\dfrac{\cot 2x-0}{x-\frac{\pi}{4}}}$$

* $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-0}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Với : $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Vậy : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[-\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-0}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=-1$

* $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cot 2x-0}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Với : $g(x)=\cot 2x\Rightarrow g'(x)=-\dfrac{2}{\sin^2 2x}\Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$

Vậy : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cot 2x-0}{x-\frac{\pi}{4}}=-2\neq 0$

Do đó : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x.\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$.

b) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1-\sqrt{2}\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-0}{x-\frac{\pi}{4}}}{\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{x-\frac{\pi}{4}}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}}{\dfrac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}}=\frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Với : $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow f'(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$g(x)=\sqrt{2}\sin x\Rightarrow g'(x)=\sqrt{2}\cos x\Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Vậy : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1-\sqrt{2}\sin x}=\dfrac{1}{1}=1$.

6.3. Bài tập áp dụng:

Bài 43. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3\sqrt[3]{4x^3-24}+\sqrt{x+2}-8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+2x}-1}{\sqrt[m]{1+3x}-1}$;

Bài 44. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{\tan(x-1)}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt[3]{4x^2+1}}{1-\cos x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2+4x+19}-\sqrt{3x^2+46}}{x^2-1}$.

7. Tính các tổng có chứa tổ hợp

7.1. Phương pháp:

Trong phần đại số tổ hợp khi áp dụng nhị thức Newton để tính các tổng có chứa các công thức tổ hợp đôi khi ta phải biết áp dụng khéo léo việc lấy đạo hàm các cấp của các vế ta sẽ tìm được tổng cần tính .

7.2. Các ví dụ minh họa :

Ví dụ 1. Tính các tổng sau :

a) $S_1=C_n^1+2C_n^2 5+3C_n^3 5^2+\cdots+nC_n^n 5^{n-1}$;

b) $S_2=2.1.C_n^2 2^{n-2}-3.2.C_n^3 2^{n-3}+\cdots+(-1)^n.n(n-1).C_n^n$.

Lời giải

a) $S_1=C_n^1+2C_n^2 5+3C_n^3 5^2+\cdots+nC_n^n 5^{n-1}$

Do $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) , ta được :

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+n.C_n^nx^{n-1} \quad (2)$$

Thế $x=5$ vào (2) , ta có : $n(1+5)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2.5+3C_n^3.5^2\cdots+n.C_n^n 5^{n-1}$

Vậy $S_1=C_n^1+2C_n^2 5+3C_n^3 5^2+\cdots+nC_n^n 5^{n-1}=n.6^{n-1}$.

b) $S_2=2.1.C_n^2 2^{n-2}-3.2.C_n^3 2^{n-3}+\cdots+(-1)^n.n.(n-1).C_n^n$

Do $(2-x)^n=C_n^0 2^n-C_n^1 2^{n-1}x+C_n^2 2^{n-2}x^2-C_n^3 2^{n-3}x^3+\cdots+(-1)^n C_n^nx^n$ (3)

Lấy đạo hàm hai vế của (3) , ta được :

$$-n(2-x)^{n-1}=-C_n^1 2^{n-1}+2C_n^2 2^{n-2}x-3C_n^3 2^{n-3}x^2+\cdots+(-1)^n n.C_n^nx^{n-1} \quad (4)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (4) , ta được :

$$n(n-1)(2-x)^{n-2}=2.1.C_n^2 2^{n-2}-3.2.C_n^3 2^{n-3}x+\cdots+(-1)^n n.(n-1)C_n^nx^{n-2} \quad (5)$$

Thế $x=1$ vào (5) , ta có :

$$n(n-1)=2.1.C_n^2 2^{n-2}-3.2.C_n^3 2^{n-3}+\cdots+(-1)^n n.(n-1)C_n^n$$

Vậy $S_2=2.1.C_n^2 2^{n-2}-3.2.C_n^3 2^{n-3}+\cdots+(-1)^n.n.(n-1).C_n^n=n(n-1)$.

Ví dụ 2. Tính các tổng sau :

a) $S_3=1^2.C_n^1+2^2.C_n^2+3^2.C_n^3+\cdots+n^2.C_n^n$;

b) $S_4=2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+\ldots..+(3n+2)C_n^n$.

Lời giải

a) $S_3=1^2.C_n^1+2^2.C_n^2+3^2.C_n^3+\cdots+n^2.C_n^n$

Do $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được :

$$n(1+x)^{n-1}=1.C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+n.C_n^nx^{n-1} \quad (2)$$

Nhân hai vế của (2) với *x* ta được :

$$n(1+x)^{n-1}.x=1.C_n^1x+2C_n^2x^2+3C_n^3x^3+\cdots+n.C_n^nx^n \quad (6)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (6), ta được :

$$n(1+x)^{n-2}\left[(n-1)x+(1+x)\right]=1^2.C_n^1+2^2C_n^2x+3^2C_n^3x^2+\cdots+n^2.C_n^nx^{n-1} \quad (6)$$

Thế $x=1$ vào (6) , ta có :

$$n(n+1).2^{n-2}=1^2.C_n^1+2^2.C_n^2+3^2.C_n^3+\cdots+n^2.C_n^n$$

Vậy ta được : $S_3=1^2.C_n^1+2^2.C_n^2+3^2.C_n^3+\cdots+n^2.C_n^n=n(n+1).2^{n-2}$.

b) Vì : $x^2(1+x^3)^n=C_n^0x^2+C_n^1x^5+C_n^2x^8+\ldots\ldots+C_n^nx^{3n+2}$

$$\Rightarrow\left[x^2(1+x^3)^n\right]'=\left[C_n^0x^2+C_n^1x^5+C_n^2x^8+\ldots\ldots+C_n^nx^{3n+2}\right]'$$

$$\Leftrightarrow x\left(1+x^3\right)^{n-1}\left[2+(3n+2)x^3\right]=2C_n^0x+5C_n^1x^4+\ldots+(3n+2)C_n^n.x^{3n-1} \quad (7)$$

Thế $x=1$ vào (7) , ta có :

$$S_4=2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+\ldots..+(3n+2)C_n^n=(3n+4).2^{n-1}.$$

7.3. Bài tập áp dụng:

Bài 45. Rút gọn các tổng sau :

a) $S_1=C_n^1+2C_n^2+\cdots+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n$;

b) $S_2=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+nC_n^{n-1}+(n+1)C_n^n$;

c) $S_3=2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+\ldots..+(3n+2)C_n^n$.

Bài 46. (*) Rút gọn các tổng sau :

a) $S_1=100C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{99}-101C_{100}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+\cdots$

$$\cdots-199C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{198}+200C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}.$$

b) $S_2=2.1.C_{20}^2 2^{18}-3.2.C_{20}^3 2^{17}+\cdots+380.C_{20}^{20}$.

c) $S_3=1^2.C_{2009}^1-2^2.C_{2009}^2+3^2.C_{2009}^3-\cdots+2009^2.C_{2009}^{2009}$.

d) $S_4=3C_n^0-5C_n^1+7C_n^2-\ldots..+4023C_{2010}^{2010}$.

Bài 47. Cho số nguyên *n* thỏa mãn đẳng thức $\frac{A_n^3+C_n^3}{(n-1)(n-2)}=35,(n\ge 3)$. Tính tổng: $S=2^2.C_n^2-3^2.C_n^3+\cdots+(-1)^n n^2.C_n^n$. *(Dự bị B_1 – 2008).*

Bài 48. Chứng minh rằng với *n* là số nguyên dương , ta luôn có :

$$n.2^n.C_n^n+(n-1).2^{n-1}.C_n^1+(n-2).2^{n-2}.C_n^2+\cdots+2.C_n^{n-1}=2n.3^{n-1}$$

(Dự bị D_1 – 2008).

Bài 49. Tìm số nguyên dương *n* sao cho

$$C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-4.2^3C_{2n+1}^4+\ldots+(2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}=2011$$

(C_n^k là tổ hợp chập *k* của *n* phần tử).

Bài 50. Tìm số nguyên dương *n* sao cho:

$$C_{2011}^1+3C_{2011}^3+\cdots\cdots+2011.C_{2011}^{2011}=2011.2^{2n+1}$$

(C_n^k là tổ hợp chập *k* của *n* phần tử).

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

Bài 1. ***Hướng dẫn và đáp số :***

a) $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x+1-1}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}x=3$;

b) $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)^2}{(x-1)\left(\sqrt{2x-x^2}+1\right)}=0$;

c) $f'(4)=\dfrac{13}{12}$; d) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$.

Bài 2. ***Hướng dẫn và đáp số:***

a) + Khi $x>1\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$ là phân thức có mẫu số khác 0 nên nó liên tục .

+ Khi $x<1\Rightarrow f(x)=3x-5$ là đa thức nên nó liên tục.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x-3)=-2$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x-5)=-2\Rightarrow \lim_{x\to 1}f(x)=-2=f(1)$$

Nên $f(x)$ liên tục tại $x=1$. Tức là $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Khi $x>1\Rightarrow f(x)=x-3\Rightarrow f'(x)=1,\ \forall x>1$.

+ Khi $x<1\Rightarrow f(x)=3x-5\Rightarrow f'(x)=3,\ \forall x<1$.

+ Khi $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}-(-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(3x-5)-(-2)}{x-1}=3$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ không tồn tại, tức là hàm số không có đạo hàm tại $x=1$.

b) Khi $a=0$ thì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

$f'(x)=\begin{cases}4x & \text{khi } x<0\\ -3x^2+b & \text{khi } x>0\end{cases}$; Khi $\begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}$ thì tồn tại $f'(0)=2$.

c) $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

$f'(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{khi } x<1\vee x>2\\ -2x+3 & \text{khi } 1<x<2\end{cases}$ và không có đạo hàm tại $x=1;\ x=2$.

d) $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; không có đạo hàm tại $x=0$.

Bài 3. Các bạn tự giải.

Bài 4. Các bạn tự giải.

Bài 5. Không có tiếp tuyến nào của (C) có hệ số góc âm. Vì:

$$y'=3x^2-6x+6=3(x-1)^2\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài 6. Các bạn tự giải.

Bài 7. Các bạn tự giải.

Bài 8. ***Đáp số :***

a) $y'=12\left(x^2-x-1\right)(2x^3-3x^2-6x+1)$;

b) $y'=\dfrac{-5(2x-1)}{(x^2-x+1)^6}$;

c) $y'=(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)\left(10x^3+x^2+5x-1\right)$;

d) $y'=1-\dfrac{1}{x^2}$; e) $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$;

f) $y'=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;

g) $y'=\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}.\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}.\sqrt{x+\sqrt{x}}.\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;

h) $y'=\dfrac{x^2+1}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+1\right)^2}}$;

i) $y'=\dfrac{14}{3(x+3)(2x-1)}\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^2}$;

k) $y'=\dfrac{5\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5}{\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 9. ***Đáp số :***

a) $y'=\dfrac{x.\sin x.\cos x+x^2.\sin x+x^3.\cos x-\sin^3 x}{x^2.\sin^2 x}$;

b) $y'=2\cos 4x$; c) $y'=\dfrac{2}{(\cos 2x-2\sin 2x)^2}$;

d) $y'=2(\sin 2x-5\sin 10x+6\sin 12x)$; e) $y'=2(\cos 2x-\sin 2x)$

f) $y'=\dfrac{1-x^2-\cos 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}$; g) $y'=\dfrac{1}{2}\left[1+\tan^2\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right]$;

h) $y'=3\left(2+\tan^2 3x+\cot^2 3x\right)$; i) $y'=\dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$;

k) $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\left(1+\cot^2\sqrt{x^2+1}\right)$; l) $y'=-\sin 4x$;

m) $y'=(\cos x-\sin x)(1+\sin 2x)$; n) $y'=\frac{3}{2}\cos 4x.\sin^2 4x$;

o) $y'=-3\cos(\cos 3x).\sin 3x$;

p) $y'=3\sin 3x.\sin(2\cos 3x).\sin^2\left[2\cos(\cos 3x)\right]$;

q) $$y'=\frac{50.\sin\left[2\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\right].\cot^4\left[\cos^2\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\right]}{(x+2)^3.\sin^2\left[\cos^2\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\right]}$$;

Bài 10. a) Ta có : $f'(x)=\frac{-1}{1+\sin x}$

$$\Rightarrow f'(0)+f'(\pi)-8f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1-1+4-2+\sqrt{2}=\sqrt{2}\ .$$

b) Ta có: $y'=f'(x)=\frac{-2\sin 2x}{(1+\sin^2 x)^2}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}-3\cdot\frac{-2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=3\quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 11. ***Hướng dẫn và đáp số:***

a) $y=3(1-2\sin^2 x.\cos^2 x)-2(1-3\sin^2 x.\cos^2 x)=1\Rightarrow y'=0$;

b) $y=-1\Rightarrow y'=0$; c) $y=1\Rightarrow y'=0$; d) $y=\frac{3}{2}\Rightarrow y'=0$;

e) $y=\frac{3}{2}\Rightarrow y'=0$; f) $y=\cot x\Rightarrow y'=\frac{-1}{\sin^2 x}$;

g) $y=\tan\frac{5x}{2}\Rightarrow y'=\frac{5}{2\cos^2\frac{5x}{2}}$; h) $y=2\cos\frac{x}{8}\Rightarrow y'=-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{8}$.

Bài 12. Ta có : $y'=x.\cos x+\sin x$

a) $\Rightarrow xy-2(y'-\sin x)+x(2\cos x-y)$

$=x^2.\sin x-2(x.\cos x)+x(2\cos x-x.\sin x)=0$ (đpcm);

b) $\Rightarrow\frac{y'}{\cos x}-x=x+\tan x-x=\tan x$ (đpcm) .

Bài 13. $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x.\cos^2 x$, $g(x)=1-3\sin^2 x.\cos^2 x$

$\Rightarrow 3f'(x)-2g'(x)=\left[3f(x)-2g(x)\right]'=(1)'=0$ (đpcm) .

Bài 14. a) $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow y'=\frac{y}{2\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow 2\sqrt{1+x^2}.y'=y$.

b) $y=\cot 2x\Rightarrow y'=-2(1+\cot^2 2x)$

$$\Rightarrow y'+2y^2+2=-2(1+\cot^2 2x)+2\cot^2 x+2=0\ .$$

Bài 15. Giải phương trình $y'=0$ biết :

a) $y'=2\cos 2x+2\sin x=0$

$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+\sin x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $y'=-2\cos x.\sin x+\cos x=\cos x(1-2\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi/2+k\pi\\ x=\pi/6+k2\pi\\ x=5\pi/6+k2\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

c) $y'=6\cos 2x-8\sin 2x+10=0\Leftrightarrow 3\cos 2x-4\sin 2x=-5$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{5}\cos 2x-\frac{4}{5}\sin 2x=-1\Leftrightarrow\cos(2x+\alpha)=-1$$

$$\Leftrightarrow 2x+\alpha=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

d) $y'=2(m-1)\cos 2x-4\sin 2x-2m=0\Leftrightarrow(m-1)\cos 2x-2\sin 2x=m$ (*)

+ Khi $(m-1)^2+4<m^2\Leftrightarrow 2m>5\Leftrightarrow m>\frac{5}{2}$ phương trình (*) vô nghiệm .

+ Khi $(m-1)^2+4\ge m^2\Leftrightarrow 2m\le 5\Leftrightarrow m\le\frac{5}{2}$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{m-1}{\sqrt{m^2-2m+5}}\cos 2x-\frac{2}{\sqrt{m^2-2m+5}}\sin 2x=\frac{m}{\sqrt{m^2-2m+5}}$$

$$\Leftrightarrow\cos(2x+\alpha)=\cos\beta\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$$

Trong đó : $\alpha=\arccos\frac{m-1}{\sqrt{m^2-2m+5}}$, $\beta=\arccos\frac{m}{\sqrt{m^2-2m+5}}$.

Bài 16. Do $y'=x^2-2(2m+1)x+m^2$ để :

a) $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'=(2m+1)^2-m^2>0$

$$\Leftrightarrow 3m^2+4m+1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

b) y' viết được thành bình phương của nhị thức

$$\Leftrightarrow \Delta' = (2m+1)^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -\frac{1}{3} \end{array}\right. ;$$

) $y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{3}$;

l) $y' < 0,\ \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) \leq 0 \\ y'(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 1 \leq 0 \\ m^2 - 8m - 3 \leq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \leq 2-\sqrt{5} \vee m \geq 2+\sqrt{5} \\ m \leq 4-\sqrt{19} \vee m \geq 4+\sqrt{19} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 4-\sqrt{19} \\ m \geq 4+\sqrt{19} \end{array}\right. ;$$

:) $y' = x^2 - 2(2m+1)x + m > 0,\ \forall x > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' = 3m^2+4m+1 = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2m+1 \leq 0 \end{cases} \\ \Delta' = 3m^2+4m+1 < 0 \\ \begin{cases} \Delta' = 3m^2+4m+1 > 0 \\ P = m^2 \geq 0 \\ S = 2(2m+1) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = -1 \vee m = -\frac{1}{3} \\ m \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \\ -1 < m < -\frac{1}{3} \\ \begin{cases} m < -1 \vee m > -\frac{1}{3} \\ m \in \mathbb{R} \\ m \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ -1 < m < -\frac{1}{3} \\ m < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}$$

Vậy, khi $m < -\frac{1}{3}$ thì $y' = x^2 - 2(2m+1)x + m > 0,\ \forall x > 0$.

Bài 17. Ta có : $y' = -mx^2 + 2(m-1)x - m$ để :

a) $y' \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -m < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$;

b) $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0 \\ P = 1 > 0 \\ S = \frac{2(m-1)}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2};$$

c) $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện : $x_1^2 + x_2^2 = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0 \\ (x_1+x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq m < \frac{1}{2} \\ \frac{4(m-1)^2}{m^2} - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq m < \frac{1}{2} \\ -m^2 - 8m + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq m < \frac{1}{2} \\ -m^2 - 8m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq m < \frac{1}{2} \\ m = 2(-2 \pm \sqrt{5}) \end{cases} \Leftrightarrow m = -2(2+\sqrt{5}) .$$

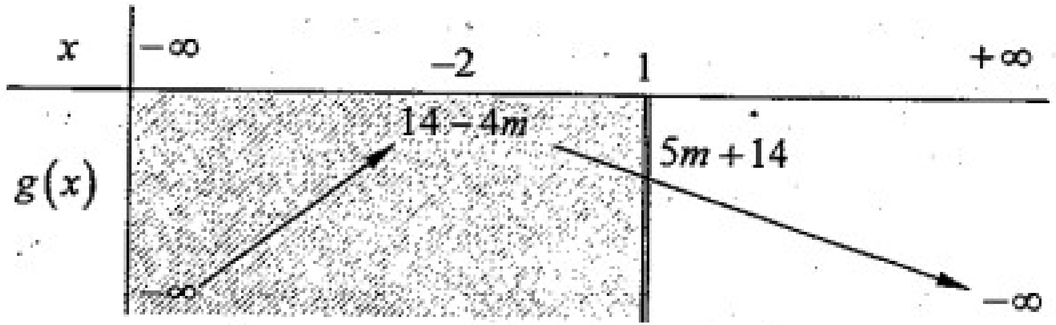
Bài 18. Ta có : $y' = \frac{mx^2 + 4mx + 14}{(x+2)^2} \leq 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow g(x) = mx^2 + 4mx + 14 \leq 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$$

+ Khi $m = 0 \Rightarrow g(x) = 14 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, vậy $m = 0$ không thỏa mãn ycbt .

+ Khi $m > 0 \Rightarrow g(x) \leq 0, \forall x \in (x_1 ; x_2)$ mà $(x_1 ; x_2)$ không thể chứa $(1;+\infty)$, vậy $m > 0$ cũng không thỏa mãn yçbt .

+ Khi $m < 0$, ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau :


x
−∞
−2
1
+∞
g(x)
14 − 4m
5m + 14
−∞
−∞

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy :

$$g(x) \leq 0,\ \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow 5m + 14 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{14}{5}$$

Kết hợp các trường hợp trên , ta được : $m \leq -\frac{14}{5}$.

Bài 19. Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m$ là tam thức bậc 2 có $a = 3 > 0$

$$\Rightarrow y' \leq 0,\ \forall x \in [x_1 ; x_2] \text{ khi } \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$$

Vậy , để $y' \leq 0$ trên một đoạn có độ dài bằng 1 , ta phải có :

$$\begin{cases} m < 3 \\ |x_1 - x_2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ (x_1 - x_2)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ (-2)^2 - 4\frac{m}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$$

Bài 20. Ta có: $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=2mx^2+m^2-9=0 \ \ (2) \end{array}\right.$$

phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \neq 0 \\ \Delta'_f = -2m\left(m^2-9\right) > 0 \\ f(0) = m^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -3 \text{ vaø } 0 < m < 3 \\ m \neq \pm\ 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{array}\right.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m < -3 \vee 0 < m < 3$.

Bài 21. Ta có : $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 3 = 0$$

có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho : $|x_1 - x_2| \leq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - 3 > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1-\sqrt{3} \vee m > -1+\sqrt{3} \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1-\sqrt{3} \vee m > -1+\sqrt{3} \\ 4(m+1)^2 - 4.3 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1-\sqrt{3} \vee m > -1+\sqrt{3} \\ -3 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \leq m < -1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} < m \leq 1 \end{array}\right.$$

Bài 22. ***Đáp số :***

a) $y = 2x - 1$; b) $y = 4(x-3) + 6 = 4x - 6$;

c) $y = 2(x-2) + 3 = 2x - 1$; d) $y = 2x - 1$, $y = -2x + 3$.

Bài 23. ***Đáp số :***

a) $y = x$; b) $y = \frac{9}{4}x + \frac{3}{4}$; c) $y = 4x + 1$;

d) $y = 4x - 15$; e) $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$, $y = \frac{1}{4}x - \frac{21}{4}$.

Bài 24. ***Hướng dẫn và đáp số:***

a) $y = -3x + 1$;

b) Ta biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M_0\left(x_0 ; x_0^3 - 3x_0^2\right) \in (C)$ là:

$$y = \left(3x_0^2 - 6x_0\right)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 \quad (\Delta)$$

Nếu (Δ) đi qua $I(1;-2)$ thì:

$$-2 = \left(3x_0^2 - 6x_0\right)(1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 \Leftrightarrow 2x_0^3 - 6x_0^2 + 6x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Vậy chỉ có một tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $I(1;-2)$, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 25. ***Đáp số :***

a) $y = -2x + \frac{3}{2}$; b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Bài 26. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị của (1) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là:

$$y = (4 - 5m)(x+1) + 2m - 1 \quad (d)$$

$$\Rightarrow (d) \text{ đi qua } A(1;2) \Leftrightarrow 2 = (4-5m).2 + 2m - 1 \Leftrightarrow m = \frac{5}{8}.$$

Bài 27. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị của (1) tại điểm $M(-2;5)$ là:

$$y - 5 = \frac{2}{(-2+1)^2}.(x+2) \Leftrightarrow y = 2x + 9 \quad (\Delta)$$

Tiếp tuyến $(\Delta) \cap Ox = A\left(-\frac{9}{2};0\right)$, $(\Delta) \cap Oy = B(0;9)$

Diện tích của tam giác tạo bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm $M(-2;5)$ là : $S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.\frac{9}{2}.9 = \frac{81}{4}$ (đvdt).

Bài 28. $(d): y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3}$, suy ra hệ số góc của (d) là $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tức là (d) tạo với chiều dương trục hoành góc 30^0 vì tiếp tuyến tạo với đường thẳng (d) góc 30^0, nên tiếp tuyến phải tạo với chiều dương trục Ox góc 60^0 hoặc 0^0, suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \sqrt{3}$ hay $k = 0$.

+ Khi $k = \sqrt{3}$ nếu x_0 là hoành độ tiếp điểm thì:

$$y'(x_0) = 3\sqrt{3}x_0^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -{}^{1}\!/_{\sqrt{3}} \Rightarrow y_0 = {}^{11}\!/_{3} \\ x_0 = {}^{1}\!/_{\sqrt{3}} \Rightarrow y_0 = {}^{11}\!/_{3} \end{array}\right.$$

Lúc này ta có 2 tiếp tuyến thỏa: $y = \sqrt{3}x + \frac{13-\sqrt{3}}{3}$; $y = \sqrt{3}x + \frac{11+\sqrt{3}}{3}$.

+ Khi $k = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 4$, có 1 tiếp tuyến thỏa $y = 4$.

Vậy có 3 tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán:

$$(\Delta_1): y = 4; (\Delta_2): y = \sqrt{3}x + \frac{11+\sqrt{3}}{3}; (\Delta_3): y = \sqrt{3}x + \frac{13-\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 29. Gọi $M(x_0;y_0) \in (C)$. Ta có: $y' = -3x^2 - 6x + 9$

Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0) \in (C)$ có hệ số góc:

$$k = y'(x_0) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x^2 + 2x + 1) + 12 = -3(x+1)^2 + 12 \leq 12$$

$\Rightarrow$ maxk = 12, đạt được khi: $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -16$

Vậy trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại $M(-1;-16)$ có hệ số góc lớn nhất. Phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng:

$$y = 12(x+1) - 16 \Leftrightarrow y = 12x - 4$$

ài 30. Giả sử $M \in (C) \Rightarrow M\left(x_0\,;2+\dfrac{1}{x_0-1}\right), (x_0 \neq 1)$

Tiếp tuyến tại M có hệ số góc: $k_1 = y'(x_0) = \dfrac{-1}{(x_0-1)^2}$

Đường thẳng IM có véc tơ chỉ phương $\overline{IM} = \left(x_0-1\,;\dfrac{1}{x_0-1}\right)$

Nên nó có hệ số góc : $k_2 = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{(x_0-1)^2}$

Vì tiếp tuyến vuông góc với IM $\Rightarrow k_1.k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0-1)^2}.\frac{1}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0-1)^4 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0-1=1 \\ x_0-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \;\Rightarrow y_0=3 \\ x_0=0 \;\Rightarrow y_0=1 \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm cần tìm: $M_1(2;3), M_2(0;1)$.

ài 31. Vì $M \in (C) \Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)$ nên phương trình tiếp tuyến của *(C)* tại M

là : $y = \dfrac{2}{(x_0+1)^2}.(x-x_0) + \dfrac{2x_0}{x_0+1} \Leftrightarrow y = \dfrac{2x}{(x_0+1)^2} + \dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \quad (\Delta)$

$\Rightarrow A = (\Delta) \cap Ox \Rightarrow A(-x_0^2;0);\ B = (\Delta) \cap Oy \Rightarrow B\left(0;\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$

Từ giả thiết ta có: $\left|\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right|.\left|-x_0^2\right| = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2+x_0+1=0 \\ 2x_0^2-x_0-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_0=-2 \\ x_0=1 \quad\;\, \Rightarrow y_0=1 \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán: $M_1\left(-\dfrac{1}{2};-2\right); M_2(1;1)$.

ài 32. Vì các đường thẳng $(d): x=1$, $(d'): y=1$ song song với các trục tọa độ, nên tiếp tuyến của (C) tạo với hai đường tiệm cận một tam giác vuông cân thì góc giữa tiếp tuyến với trục hoành phải bằng 45^0, nên hệ số góc của tiếp tuyến

là $k = \pm 1$ và tiếp tuyến không được trùng với (d) hoặc (d').

+ Khi $k=1$, nếu gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm thì ta có:

$$-\frac{1}{(x_0-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = -1 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy (C) không có tiếp tuyến có hệ số góc $k=1$.

+ Khi $k=-1$, nếu gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm thì ta có :

$$-\frac{1}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \Rightarrow y_0=2 \\ x_0=0 \Rightarrow y_0=0 \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k=-1$:

$$(\Delta_1): y = -1(x-2)+2 = -x+4 \neq (d), (d')$$
$$(\Delta_1): y = -1(x-0)+0 = -x \neq (d), (d')$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm : $(\Delta_1): y=-x$, $(\Delta_2): y=-x+4$.

Bài 33. Ta biết phương tiếp tuyến của (C) tại $M_0\left(x_0\,;x_0+\dfrac{1}{x_0+1}\right) \in (C)$ là :

$$y = \left[1-\frac{1}{(x_0+1)^2}\right](x-x_0) + x_0 + \frac{1}{x_0+1} \quad (\Delta)$$

Vì (Δ) đi qua $A(1;-3)$ nên , ta có :

$$-3 = \left[1-\frac{1}{(x_0+1)^2}\right](1-x_0) + x_0 + \frac{1}{x_0+1} \Leftrightarrow 2x_0^2+5x_0+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-2 \\ x_0=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy , có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán : $(\Delta_1): y=-3$; $(\Delta_2): y=-3x$.

Bài 34. Ta biết phương tiếp tuyến của (C) tại $M_0\left(x_0\,;\dfrac{1}{3}x_0^3-2x_0^2+3x_0\right) \in (C)$ là

: $\quad y = (x_0^2-4x_0+3)(x-x_0) + \dfrac{1}{3}x_0^3 - 2x_0^2 + 3x_0 \quad (\Delta)$

Vì (Δ) đi qua $A\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{4}{3}\right)$ nên , ta có:

$$\frac{4}{3} = (x_0^2-4x_0+3)\left(\frac{4}{9}-x_0\right) + \frac{1}{3}x_0^3 - 2x_0^2 + 3x_0$$

$$\Leftrightarrow x_0(3x_0^2-11x_0+8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=\dfrac{8}{3} \\ x_0=1 \end{array}\right.$$

Vậy qua điểm $A\left(\frac{4}{9};\frac{4}{3}\right)$ có thể kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Phương trình các tiếp tuyến ấy là :

$$(\Delta_1): y = 3x;\ (\Delta_2): y = \frac{4}{3};\ (\Delta_3): y = -\frac{5}{9}x + \frac{128}{81}.$$

Bài 35. Ta biết phương tiếp tuyến của (C) tại $M_0\left(x_0 ; \frac{x_0^2+2x_0+2}{x_0+1}\right) \in (C)$ là :

$$y = \frac{x_0^2+2x_0}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0^2+2x_0+2}{x_0+1} \quad (\Delta)$$

Giả sử tiếp tuyến (Δ) đi qua $I(-1;0)$, ta có:

$$0 = \frac{x_0^2+2x_0}{(x_0+1)^2}(-1-x_0) + \frac{x_0^2+2x_0+2}{x_0+1} \Leftrightarrow 0.x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \varnothing$$

Vậy không có hai tiếp tuyến nào của (C) đi qua $I(-1;0)$.

Bài 36. Gọi (Δ) là tiếp tuyến của (C) ta biết, nếu khoảng cách từ $I(1;1)$ đến (Δ) là $IH \perp (\Delta) \Rightarrow IH \le IM \Rightarrow IH\max \Leftrightarrow IH \equiv IM \perp (\Delta)$, vậy bài toán trở thành tìm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M là $(\Delta) \perp IM$.

Giả sử $M \in (C) \Rightarrow M\left(x_0 ; 1 + \frac{1}{x_0-1}\right), (x_0 \ne 1)$

Tiếp tuyến tại M có hệ số góc: $k_1 = y'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$

Đường thẳng IM có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{IM} = \left(x_0 - 1 ; \frac{1}{x_0-1}\right)$

Nên nó có hệ số góc : $k_2 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{(x_0-1)^2}$

Vì tiếp tuyến vuông góc với $IM \Rightarrow k_1.k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0-1)^2}.\frac{1}{(x_0-1)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)^4 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 1 = 1 \\ x_0 - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_0 = 2 & \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = 0 & \Rightarrow y_0 = 1 \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán :

$$(\Delta_1): y = -1(x-2) + 2 = -x + 4$$

$$(\Delta_2): y = -1(x-0) + 0 = -x$$

Bài 37. ***Đáp số :***

a) $dy = \frac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2 - 5x + 5)^2} \cdot dx$; b) $dy = 32(1-2x)(x-x^2)^{31}.dx$;

c) $dy = \frac{x^2-1}{2x}\sqrt{x^3+x}.dx$; d) $dy = -2\cot x\left(1+\cot^2 x\right).dx$;

e) $dy = -6\cot^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\left[1+\cot^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right].dx$;

f) $dy = -[\sin x.\cos(\cos x) + \cos x.\sin(\sin x)].dx$.

Bài 38. Ta có : $y = \sin x - \cos x \Rightarrow dy = (\cos x + \sin x).dx$.

$\Rightarrow y.dy + \cos 2x.dx = \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)dx + \cos 2x.dx = -\cos 2x.dx + \cos 2x.dx = 0$

Hướng dẫn và đáp số:

a) $\sqrt{4,02} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,02 = 2,005$;

b) $\tan 44^0 30' \approx \tan 45^0 + \left(1+\tan^2 45^0\right).\left(-\frac{\pi}{360}\right) = 1 - \frac{\pi}{180} \approx 0,9825$;

c) $\sqrt[3]{7,97} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}.(-0,03) = 2 - \frac{0,03}{12} \approx 1,9975$.

Bài 39. ***Đáp số :***

a) $y'' = -(x.\cos x + 2\sin x)$; b) $y''' = -32.\sin 4x$;

c) $y^{(5)} = 3840$; d) $y^{(4)} = \frac{264}{(x-2)^5}$.

Bài 40. ***Hướng dẫn :***

a) $y' = x.\cos x + \sin x$; $y'' = 2\cos x - x\sin x$

$\Rightarrow xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = x^2.\sin x - 2(x\cos x) + 2x.\cos x - x^2 \sin x = 0$;

b) $y' = -3.\sin 6x$; $y'' = -18.\cos 6x$

$\Rightarrow 18(2y-1) + y'' = 18\left(2\cos^2 3x - 1\right) - 18.\cos 6x = 18.\cos 6x - 18.\cos 6x = 0$ c) Ta có : $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x\cos x} = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x \Rightarrow y'' = -\sin x - \cos x = -y \Rightarrow y'' + y = 0$;

d) Do : $y = \left(x^2-1\right)^2$, nên : $y' = 4x\left(x^2-1\right)$; $y'' = 12x^2 - 4$;

$$y''' = 24x ;\ y^{(4)} = 24$$

$$\Rightarrow y^{(4)} + 2xy''' - 4y'' - 40 = 24 + 48x^2 - 48x^2 + 16 - 40 = 0;$$

e) $y' = \frac{7}{(x+4)^2}$; $y'' = -\frac{14}{(x+4)^3}$

$$\Rightarrow 2y'^2=\frac{98}{(x+4)^4}\ ;\ (y-1)y''=\left(\frac{x-3}{x+4}-1\right)\left[-\frac{14}{(x+4)^3}\right]=\frac{98}{(x+4)^4}$$

Suy ra điều phải chứng minh .

f) $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\ \Rightarrow y'=\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}.\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}=\dfrac{y^2}{2y.\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{y}{2\sqrt{1+x^2}}$

$$\Rightarrow y''=\frac{y'.\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot y}{4\left(1+x^2\right)}$$

$$\Rightarrow 4\left(x^2+1\right).y''+4x.y'-y=y'.\sqrt{1+x^2}-\frac{x.y}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{4xy}{\sqrt{1+x^2}}-y$$

$$=y-\frac{4xy}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{4xy}{\sqrt{1+x^2}}-y=0$$

g) $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k$

$$\Rightarrow y'=k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-1}\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{k.y}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow y''=k\cdot\frac{y'.\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot y}{1+x^2}$$

Nên : $\left(1+x^2\right)y''+xy'-k^2y=k\left(k.y-\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}}\right)+\dfrac{k.xy}{\sqrt{1+x^2}}-k^2y=0$.

Bài 41. ***Hướng dẫn và đáp số :***

a) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}=2-\dfrac{5}{x+2}\Rightarrow y^{(n)}=(-5)\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$;

b) $y=\dfrac{3}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}\ \Rightarrow y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$;

c) $y=\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}=\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow y^{(n)}=\dfrac{3.(-1)^n(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}+\dfrac{(-1)^n .n!}{(x-1)^{n+1}}$;

d) $y=\dfrac{4x^2-5x+3}{2x^2-3x+1}=2+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{2x-1}\ \Rightarrow y^{(n)}=\dfrac{2(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{3(-1)^n.2^n.n!}{(2x-1)^{n+1}}$;

d) $y=4\sin x.\sin 2x.\sin 3x=\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x$

$$\Rightarrow y^{(n)}=2^n.\sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)+4^n.\sin\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)-6^n.\sin\left(6x+n\frac{\pi}{2}\right);$$

e) $y=\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos 4x\Rightarrow y^{(n)}=\dfrac{3}{8}\cdot 4^n.\cos\left(4x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$;

f) $y=\cos 3x\Rightarrow y^{(2n)}=3^{2n}.\cos(3x+n\pi)=(-1)^n 3^{2n}.\cos 3x=(-1)^n 3^{2n}y$.

Bài 42. ***Hướng dẫn và đáp số :***

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}.\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+3}$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{4}.f'(1)$$

Với $f(x)=\sqrt{x+8}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+8}}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{1}{6}$

Do đó : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3}=\dfrac{1}{24}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

Với $f(x)=x^3-\sqrt{3x-2}\Rightarrow f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}\Rightarrow f'(1)=3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

Do đó : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}=\dfrac{3}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$

Với $\begin{cases}f(x)=\sin x-\sqrt{2x+1}\\ g(x)=\sqrt{3x+4}-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}\\ g'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(0)=0\\ g'(0)=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Do đó : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=0$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3\sqrt[3]{4x^3-24}+\sqrt{x+2}-8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\sqrt[3]{4x^3-24}+\sqrt{x+2}-8\sqrt{2x-3}}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}\left(\frac{-1}{x+2}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\frac{1}{4}\cdot f'(2)$$

Với $f(x)=3\sqrt[3]{4x^3-24}+\sqrt{x+2}-8\sqrt{2x-3}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{12x^2}{\sqrt[3]{\left(4x^3-24\right)^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}-\frac{8}{\sqrt{2x-3}}\Rightarrow f'(2)=12+\frac{1}{4}-8=\frac{17}{4}$$

Vậy : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3\sqrt[3]{4x^3-24}+\sqrt{x+2}-8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}=-\dfrac{17}{16}$.

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\dfrac{f'(1)}{g'(1)}$

Với $\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x} \\ g(x)=\sqrt[4]{x} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ g'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'(1)=\dfrac{1}{3} \\ g'(1)=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Do đó : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\dfrac{1/3}{1/4}=\dfrac{4}{3}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+2x}-1}{\sqrt[m]{1+3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$

Với $\begin{cases} f(x)=\sqrt[n]{1+2x} \\ g(x)=\sqrt[m]{1+3x} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{(1+2x)^{n-1}}} \\ g'(x)=\dfrac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'(0)=\dfrac{1}{n} \\ g'(0)=\dfrac{1}{m} \end{cases}$

Do đó : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+2x}-1}{\sqrt[m]{1+3x}-1}=\dfrac{1/n}{1/m}=\dfrac{m}{n}$.

Bài 43. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$

Với $\begin{cases} f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1} \\ g(x)=\sin x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \\ g'(x)=\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} f'(0)=2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3} \\ g'(0)=1 \end{cases}$. Do đó : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}=\dfrac{5}{3}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{\tan(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\dfrac{f'(1)}{g'(1)}$

Với $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+3}-2x \\ g(x)=\tan(x-1) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}-2 \\ g'(x)=1+\tan^2(x-1) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'(1)=\dfrac{1}{4}-2=-\dfrac{7}{8} \\ g'(1)=1 \end{cases}$.

Do đó : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{\tan(x-1)}=-\dfrac{7}{8}$.

c) *Đáp số :* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt[3]{4x^2+1}}{1-\cos x}=-\dfrac{2}{3}$;

g) *Đáp số :* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\dfrac{1}{4}$;

i) *Đáp số :* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2+4x+19}-\sqrt{3x^2+46}}{x^2-1}=\dfrac{61}{140}$.

Bài 44. Rút gọn các tổng sau :

a) $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$

$\Rightarrow n.(1+x)^{n-1}=1.C_n^1+2.C_n^2x+3.C_n^3x^2+\cdots+(n-1).C_n^{n-1}x^{n-2}+n.C_n^nx^{n-1}$

Cho $x=1\Rightarrow n.2^{n-1}=1.C_n^1+2C_n^2+\cdots+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n$

$\Rightarrow S_1=C_n^1+2C_n^2+\cdots+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=n.2^{n-1}$;

b) $x.(1+x)^n=C_n^0.x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+C_n^3x^4+\cdots+C_n^{n-1}x^n+C_n^nx^{n+1}$

$\Rightarrow(1+x)^n+n.(1+x)^{n-1}.x=1.C_0^n+2.C_n^1+3.C_n^2x+4.C_n^3x^2+\cdots$

$\cdots+n.C_n^{n-1}x^{n-1}+(n+1).C_n^nx^n$

Cho $x=1$

$\Rightarrow 2^n+n.2^{n-1}=1.C_n^0+2.C_n^1+3.C_n^2+4.C_n^3+\cdots+n.C_n^{n-1}+(n+1).C_n^n$

$\Rightarrow S_2=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+nC_n^{n-1}+(n+1)C_n^n=(n+2)2^{n-1}$;

c) $S_3=2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+\ldots..+(3n+2)C_n^n$

Vì : $x^2(1+x^3)^n=C_n^0x^2+C_n^1x^5+C_n^2x^8+\ldots\ldots+C_n^nx^{3n+2}$

$\Rightarrow\left[x^2(1+x^3)^n\right]'=\left[C_n^0x^2+C_n^1x^5+C_n^2x^8+\ldots\ldots+C_n^nx^{3n+2}\right]'$

$\Leftrightarrow 2x(1+x^3)^n+3nx^4(1+x^3)^{n-1}=2C_n^0x+5C_n^1x^4+\ldots+(3n+2)C_n^n.x^{3n-1}\ (7)$

Thế $x=1$ vào (7) , ta có:

$S_3=2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+\ldots..+(3n+2)C_n^n=(3n+4).2^{n-1}$.

Bài 45. (*) Rút gọn các tổng sau:

a) Ta có :

$(x^2+x)^{100}=C_{100}^0x^{200}+C_{100}^1x^{198}.x+C_{100}^2x^{196}.x^2+\ldots C_{100}^{99}x^2.x^{99}+C_{100}^{100}x^{100}$

$=C_{100}^0x^{200}+C_{100}^1x^{199}+C_{100}^2x^{198}+\ldots+C_{100}^{99}x^{101}+C_{100}^{100}x^{100}$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên, ta có:

$100(x^2+x)^{99}(2x+1)=200.C_{100}^0x^{199}+199.C_{100}^1x^{198}+\ldots+101.C_{100}^{99}x^{100}+100.C_{100}^{100}x^{99}$

Thay $x=-\frac{1}{2}$, ta được:

$$0=200.C_{100}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)^{199}+199.C_{100}^{1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{198}+\cdots+101.C_{100}^{99}\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}+100.C_{100}^{100}\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}$$

$$-200.C_{100}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}+199.C_{100}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{198}-\cdots+101.C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}-100.C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{99}=0$$

Vì $C_{100}^{k}=C_{100}^{100-k}$, $0\le k\le 100$, suy ra ta có :

$$100.C_{100}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{99}-101.C_{100}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+\cdots-199.C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{198}+200.C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}=0$$

Vậy ta được : $S_1=0$.

) Đáp số : $S_2=380$.

) Đáp số : $S_3=0$.

) Vì : $x^3(1-x^2)^{2010}=C_{2010}^{0}x^3-C_{2010}^{1}x^5+C_{2010}^{2}x^7-\ldots\ldots+C_{2010}^{2010}x^{4023}$

$$\Rightarrow\left[x^3(1-x^2)^{2010}\right]'=\left[C_{2010}^{0}x^3-C_{2010}^{1}x^5+C_{2010}^{2}x^7-\ldots\ldots+C_{2010}^{2010}x^{4023}\right]'$$

$$\Leftrightarrow 3x^2\left(1-x^2\right)^{2010}-4020x^4\left(1-x^2\right)^{2009}=3C_n^0x^2-5C_n^1x^4+7C_{2010}^{2}x^6-\cdots$$

$$\cdots\cdots+4023C_n^n.x^{4020}\ (*)$$

Thế $x=1$ vào (*), ta có: $0=3C_n^0-5C_n^1+7C_n^2-\ldots..+4023C_{2010}^{2010}=S_4$.

ài 46. Ta có : $\frac{A_n^3+C_n^3}{(n-1)(n-2)}=35$. Điều kiện $n\ge 3, n\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{n!}{(n-3)!}+\frac{n!}{3!.(n-3)!}}{(n-1)(n-2)}=35\Leftrightarrow\frac{(n-2)(n-1).n+\frac{(n-2)(n-1).n}{6}}{(n-2)(n-1)}=35$$

$$\Leftrightarrow n+\frac{n}{6}=35\Leftrightarrow n=30\ \text{(thỏa điều kiện)}.$$

Do $\left(1+x\right)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1), ta được :

$$n\left(1+x\right)^{n-1}=1.C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+n.C_n^nx^{n-1}\ (2)$$

Nhân hai vế của (2) với *x* ta được :

$$n\left(1+x\right)^{n-1}.x=1.C_n^1x+2C_n^2x^2+3C_n^3x^3+\cdots+n.C_n^nx^n\ (6)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (6), ta được :

$$(n-1)(1+x)^{n-2}.x+n\left(1+x\right)^{n-1}=1^2.C_n^1+2^2C_n^2x+3^2C_n^3x^2+\cdots+n^2.C_n^nx^{n-1}\ (6)$$

hế $x=-1$ vào (6), ta có:

$$0=1^2.C_n^1-2^2.C_n^2+3^2.C_n^3-\cdots+\left(-1\right)^{n-1}.n^2.C_n^n$$

$$\Leftrightarrow-1^2.C_n^1+2^2.C_n^2-3^2.C_n^3+\cdots+\left(-1\right)^n.n^2.C_n^n=0$$

$$\Rightarrow S=2^2.C_n^2-3^2.C_n^3+\cdots+\left(-1\right)^n.n^2.C_n^n=1^2C_n^1=n$$

Vậy ta được : $S=30$.

Bài 47. Do $\left(x+1\right)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots++C_n^{n-1}x+C_n^n$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) , ta được :

$$n\left(x+1\right)^{n-1}=n.C_n^0.x^{n-1}+\left(n-1\right)C_n^1x^{n-2}+\left(n-2\right)C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}\ (2)$$

Thế $x=2$ vào (2) , ta có :

$$n\left(2+1\right)^{n-1}=n.C_n^0.2^{n-1}+\left(n-1\right)C_n^1 2^{n-2}+\left(n-2\right)C_n^2 2^{n-3}+\cdots+C_n^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 2n.3^{n-1}=n.2^n.C_n^n+\left(n-1\right).2^{n-1}.C_n^1+\left(n-2\right).2^{n-2}.C_n^2+\cdots+2.C_n^{n-1}$$

Bài 48. Vì: $\left(1+x\right)^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1x+C_{2n+1}^2x^2+C_{2n+1}^3x^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$

Lấy đạo hàm 2 vế , ta được :

$$\Rightarrow\left(2n+1\right)\left(1+x\right)^{2n}=C_{2n+1}^1+2C_{2n+1}^2x+3C_{2n+1}^3x^2+\cdots+\left(2n+1\right)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}$$

Cho $x=-2$

$$\Rightarrow 2n+1=C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-4.2^3C_{2n+1}^4+\cdots+\left(2n+1\right).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\Rightarrow 2n+1=2011\Rightarrow n=1005.$$

Bài 49. Ta có :

$$\left(1+x\right)^{2011}=C_{2011}^0+C_{2011}^1x+C_{2011}^2x^2+C_{2011}^3x^3+\cdots+C_{2011}^{2010}x^{2n}+C_{2011}^{2011}x^{2011}$$

$$\Rightarrow 2011.\left(1+x\right)^{2010}=1.C_{2011}^1+2.C_{2011}^2x+3.C_{2011}^3x^2+\cdots$$

$$\cdots+2010.C_{2011}^{2010}x^{2009}+2011.C_{2011}^{2011}x^{20110}$$

+ Khi $x=1$, ta được :

$$2011.2^{2010}=1.C_{2011}^1+2.C_{2011}^2+3.C_{2011}^3+\cdots+2010.C_{2011}^{2010}+2011.C_{2011}^{2011}$$

+ Khi $x=-1$, ta được :

$$0=1.C_{2011}^1-2.C_{2011}^2+3.C_{2011}^3-\cdots-2010.C_{2011}^{2010}+2011.C_{2011}^{2011}$$

Do đó :

$$2011.2^{2010}=2\left(1.C_{2011}^1+3.C_{2011}^3+\cdots\cdots+2011.C_{2011}^{2011}\right)$$

$$\Rightarrow 1.C_{2011}^1+3.C_{2011}^3+\cdots\cdots+2011.C_{2011}^{2011}=2011.2^{2009}$$

Tức là , ta có : $2011.2^{2n+1}=2011.2^{2009}\Leftrightarrow 2n+1=2009\Leftrightarrow n=1004$.

MỤC LỤC

hương 1: **HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC**

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC 5

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƯA VỀ DẠNG CƠ BẢN 24

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN 35

§4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP HAY DÙNG KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 52

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 1 67

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ 70

hương 2: **TỔ HỢP – XÁC SUẤT** 140

§1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN, HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP 140

§2. NHỊ THỨC NEWTON 159

§3. XÁC SUẤT 170

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ CÁC BÀI TẬP

hương 3: **DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN** 218

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC – DÃY SỐ 218

§2. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN 227

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP 243

hương 4: **GIỚI HẠN** 261

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ 261

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ 277

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC 297

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP 309

hương 5: **ĐẠO HÀM** 324

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP 358